HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan historia kouluopetuksessa

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka, aineenopettajalinja
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2012
Harri Juhani Kuokkanen

Ohjaaja: Juha Oikkonen

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

SISÄLTÖ

KUVAT

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty	Laitos/Institution– Department
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä/Författare – Author

Harri Kuokkanen

Työn nimi / Arbetets titel – Title

Matematiikan historia kouluopetuksessa

Oppiaine /Läroämne – Subject

Matematiikka

Työn laji/Arbetets art – Level	Aika/Datum – Month and year	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Huhtikuu 2012	66 s.(+ 14 ls.)

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Matematiikan historian käyttäminen opetuksessa ei ole uusi ajatus, onhan sen perään kuulutettu jo satakunta vuotta. Kuitenkin alan teoreettinen ja empiirinen tutkimus on suhteellisen tuore ilmiö, ja suuri osa alan tutkimuksesta onkin vasta viimeisten muutaman vuosikymmenen tuotosta. Tässä tutkielmassa tarkastellaan ajankohtaisen kansainvälisen tutkimuksen joitain keskeisiä teoreettisia näkökohtia sekä katsauksia käytäntöön, myös suomalaisen koulun näkökulmasta. Tutkielman alkupuoli keskittyy teoreettiseen tarkasteluun, jossa esitellään perusteluja matematiikan historian käyttämiseksi kouluopetuksessa sekä myös keskeisiä kriittisiä huomioita sitä kohtaan. Perustelut voidaan luokitella kahteen luokkaan: matematiikan historian käyttämiseksi opetuksessa matematiikan sisältöjen opettamiseksi tehokkaammin tai monipuolisemmin, esimerkiksi motivoinnin tai muun opiskelijan tunnepuoleen vaikuttamisen kautta, sekä matematiikan historian käyttämiseksi opetuksessa historian itsensä, sen tarjoamien metamatemaattisten näkökulmien ja matematiikkaa inhimillistävän vaikutuksen vuoksi. Meta-matemaattisilla näkökulmilla tarkoitetaan mm. matematiikan filosofisten, kulttuuristen ja yhteiskunnallisten ulottuvuuksien tarkastelua.

Edelleen matematiikan historian käyttötapoja opetuksessa voidaan jakaa eriasteisiin luokkiin, kuten historian valaisevaan käyttöön, opetusmoduuleihin sekä historiaan pohjautuvaan opetuksen etenemiseen. Valaiseva käyttö tarkoittaa kaikkea opetusta piristävistä anekdooteista aina aiheeseen perehdyttäviin ja sitä kontekstualisoiviin esi- ja jälkipuheisiin. Opetusmoduuleilla taas tarkoitetaan opetuksessa käytettäviä kokonaisuuksia matematiikan opettamiseen ja oppimiseen sekä mahdollisesti meta-matemaattisten kysymysten työstämiseen historian kautta, esimerkiksi projektein ja tutkimustehtävin. Historiaan pohjautuvassa etenemisessä ei historian läsnäoloa välttämättä tuoda esille suorasti, vaan siinä matematiikan opetus ja oppiminen seuraa historian tarjoamia matemaattisten käsitteiden ja keksintöjen syntymisten ja kehittymisten tarjoamaa polkua, esimerkiksi kognitiivisen mallin opetuksessa etenemisjärjestykselle. Historian käyttämisen eri muodot voidaankin ajatella kahden tekijän, sen perusteiden (”miksi historiaa?”) ja toisaalta sen yleisemmän tavan (”miten historiaa?”) määrittämänä. Lisäksi tarkastellaan historiallisten aineistojen ja alkutekstien opetuksessa käyttämiseen liittyviä etuja ja ongelmakohtia.

Katsauksessa käytäntöön esitellään joitain matematiikan historiakäyttöön liittyviä tutkimuksia ja niiden tuloksia. Opettajien suosimia tapoja käyttää historiaa opetuksessaan näyttäisivät olevan paitsi henkilöhistorialliset elementit, myös matematiikan historiallisten ongelmien käsitteleminen. Näiden käyttö onkin perusteltua, sillä tämä mahdollistaa monipuoliset ja moniperusteisen käytön matematiikan historialle, tarjoamalla paitsi matematiikkaa inhimillistävän näkökulman, myös kytkemällä tämän kiinteästi matematiikan sisältöjen oppimiseen. On havaittu, että matematiikan historian käyttäminen opetuksessa aidosti edesauttaa oppilaiden kykyä jäsentää ja muotoilla matematiikkaa koskevia käsityksiään ja pohtimaan meta-matemaattisia kysymyksiä, kuin myös ymmärtämään paremmin matemaattisen tutkimuksen tekemisen luonnetta. Kuitenkin opettajien keskeisimpinä haasteina historian käyttämiselle vaikuttaisivat olevan ensisijaisesti asiantuntemuksen puute sekä ajalliset resurssit. Esimerkiksi helposti käytettävät opetusmateriaalit voisivat auttaa opettajia sisällyttämään historiaa opetukseensa pienellä vaivalla. Myös oppikirjojen suuri vaihtelu matematiikan historiaa koskevien sisältöjen osalta luo osaltaan tilanteen, jossa oppilaiden mahdollisuudet käsitellä matematiikan historiaa koulussa vaihtelevat suuresti.

Tutkielman lopuksi esitetään suomalaisessa koulussa vektoreita käsittelevällä lukion pitkän oppimäärän kurssilla tehty kokeilu historiallisen lähteen käyttämisestä, sekä opiskelijoilta saadun palautteen pääkohtia. Mikäli opiskelijat eivät ole tottuneet itselleen vieraiden aineistojen tutkimiseen, olisi hedelmällisintä aloittaa niiden käyttäminen totuttelemalla vähän kerrallaan, isompiin kokonaisuuksiin pikku hiljaa siirtyen. Samoin olisi tärkeää laatia avustavia materiaaleja, kuten sanalistoja hankalista vieraskielisistä sanoista ja matemaattisista käsitteistä, tekstien tulkinnan helpottamiseksi.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

Matematiikan historia, matematiikan opetus, meta-matematiikka, matematiikan inhimillistäminen, alkuperäiset lähteet, opetussuunnitelma, oppikirjat, asenteet, uskomukset, motivointi

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto, Gustaf Hällströminkatu 2, PL 68
00014 Helsingin yliopisto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

1. Johdanto

Matematiikalla on kiehtova ja moniulotteinen historia, ja sen aikakausia ja ihmisryhmiä yhteen sitova luonne tekee siitä erään inhimillisen ajattelun keskeisimmistä ja rikkaimmista aloista. Edelleen matematiikan kulloistakin aikakautta määrittäneet käsitteet, ongelmat ja niiden muotoilu, kokonainen sielunmaisema, tuovat viestiä kaukaa ja läheltä historiasta, erilaisista kulttuuripiireistä ja traditioista, ihmisenä olemisen muodoista ja käsittämisen tavoista.

Kuitenkin matematiikan näkyvin ja arvostetuin muoto nykyaikana on sen teknisen soveltamisen valtavassa painotuksessa, sen hyödyllisessä yhteydessä teknologian kehitykseen ja talouselämään, ja tämä painotus on vahvasti läsnä myös koulumaailmassa – siitä huolimatta että 1900-luvun alusta alkaen matematiikan koulutuksen tutkimuksen piirissä on ollut pyrkimystä kääntyä taas historian suuntaan, kartoittaa sen ulottuvuuksia ja kuunnella sen kertomaa. Julkinen koulutus peilaa yhteiskunnan arvostuksia ja suuntauksia, mutta myös muokkaa kokemisen ja tietämisen maailmoja, ja on siksi luontevaa kysyä, miten matematiikan historia näkyy kouluopetuksessa ja miten se voisi siellä näkyä, ehkäpä vielä: miten sen tulisi näkyä? Muiden muassa näitä seikkoja tarkastelen käsillä olevassa pro gradu -tutkielmassa.

Tutkielma liittyy myös oman opettajuuteni kehittymiseen ja kehittämiseen. Matematiikan opintojeni alusta alkaen olen vierastanut soveltavaa tehokkuusajattelua ja matematiikan typistämistä teknillisten ja luonnontieteiden aputieteeksi ja suuntautunut enemmän matematiikan mieltämiseen itsessään arvokkaana ajattelun muotonaan, jolla on tarjottavanaan ainutlaatuinen näkökulma olemassaolon ja totuuksien tarkasteluun, muiden ohessa. Opintojeni loppupuoliskolla vihdoin löytyneeseen, ensimmäiseen kunnolla mukaansa temmanneeseen sivuaineeseeni, ja siten tulevaan toiseen opetettavaan aineeseeni, filosofiaan syventyminen, on sekin osaltaan suunnannut kohti matematiikan tarkastelua osana laajempaa kulttuurihistoriaa, inhimillisen ajattelun historiaa; osana yhteiskuntaa, tieteitä ja taiteita.

Matematiikan historiasta kouluopetuksessa ei ole juuri ollut saatavilla suomenkielistä teoreettista tutkimusta, ja suomenkielinen aineisto onkin rajautunut lähinnä yliopistojen matematiikan historiaa käsitteleviin luentomateriaaleihin. Tämän tutkielman tarkoituksena on siten koota yhteen joitakin oleellisiksi kokemiani seikkoja matematiikan historian opetukseen liittyen. Alan viimeisen muutaman vuosikymmenen aikana tapahtuneesta valtavasta ryöpsähtämisestä johtuen tämän tutkielman puitteissa ei ole mahdollista käsitellä alan kysymyksiä kattavasti eikä syventyä moniinkaan yksityiskohtiin. Sen sijaan pyrkimyksenä on avata lukijalle jollakin tasolla yhtenäinen kuva matematiikan historian opettamisen ulottuvuuksista sekä näkökulmia erityisesti suomalaiseen käytäntöön. Siten toivon tutkielman voivan innostaa myös opettajia, opettajaksi aikovia sekä opetuksen suunnitteluun osallistuvia ihmisiä ottamaan selvää matematiikan historian tarjoamista eduista matematiikan opetukselle, kuin myös kohdistamaan huomiota joihinkin keskeisiin ongelmakohtiin. Parhaassa tapauksessa tutkielma voisi siten hyödyttää paitsi sen tekijää, myös muita aiheesta kiinnostuneita.

Tutkielman ensimmäisellä puoliskolla, luvussa 2 käydään läpi matematiikan historian opetusta tarkastelevan teoreettisen tutkimuksen piirissä esiintyneitä keskeisiä näkökohtia, muun muassa matematiikan historian opetukseen sisällyttämisen perusteluja ja kritiikkiä (2.2), kuten myös näkökulmia sen käyttämiseen opetuksessa, esimerkiksi historiallisten aineistojen avulla (2.3).

Luvussa 3 esitellään joitakin näkökulmia matematiikan historiaan käytännössä, opettajien ja oppilaiden näkökulmasta, parin kansainvälisen tutkimuksen (3.1 ja 3.3) sekä allekirjoittaneen, osana pedagogisia opintojaan tekemänsä kyselytutkimuksen kautta (3.2). Lisäksi kyseisessä luvussa tarkastellaan lyhyesti kahden suomalaisen lukion pitkän oppimäärän oppikirjasarjan eroavaisuuksia niiden sisältämän matematiikan historian suhteen (3.4).

Luvussa 4 kuvataan eräs lukio-opetuksessa toteutettu historialliseen aineistoon pohjautuva Sir William Rowan Hamiltonin postuumisti julkaistun teoksen ”Elements of Quaternions” (1866) osaa hyödyntänyt opetustapahtuma.

Lopuksi luvussa 5 kootaan yhteen tutkielman johtopäätöksiä ja nostetaan muutamia kiinnostavia matematiikan historian opetukseen liittyviä jatkotutkimuksen mahdollisuuksia.

2. Teoreettinen tarkastelu

Tässä luvussa esitellään matematiikan historian opetuskäyttöön liittyvän kansanvälisen tutkimuksen joitakin keskeisiä ja ajankohtaisia näkökohtia, kuten perusteluja ja tapoja matematiikan historian sisällyttämiseksi opetukseen, kuten myös keskeisiä kriittisiä huomioita siihen liittyen.

2.1. Matematiikan historian ulottuvuudet

Matematiikan historian eräs keskeinen ominaisuus opetuksen näkökulmasta on sen taipumus asettaa matematiikan kehityksen vaiheita historialliseen kontekstiin. Mutta jotta matematiikan historian opetus olisi mahdollista, on se itsessään kontekstualisoitava, sillä historia voi matematiikankin tapauksessa tarkoittaa montaa asiaa. Matematiikan historia on paitsi matemaattisten ongelmien, myös henkilöiden, kilpailevien tekniikoiden ja merkintätapojen, ajattelun rajojen ja niiden ylittämisten historiaa. Se on siis ollut ja on edelleen erityisesti inhimillistä toimintaa ja kytkeytynyt muihin toiminnan muotoihin. Lisäksi on kulttuurillinen konteksti: matematiikka ei ole ollut osa vain yhtä kulttuuria vaan eri *kulttuureja*, ja siksi sen ilmenemismuotoja on siinä missä kulttuureitakin, olivat nämä kulttuurit sitten maantieteellisesti tai etnisesti tai matematiikan harjoittamisen (matematiikka aputieteenä, matematiikka ideaalina,…) kautta määrittyneitä. Se on siis myös erilaisten matematiikkakuvien historiaa.

Kun siis puhutaan matematiikan historian sisällyttämisestä opetukseen, on kysyttävä *mitä* matematiikan historian ulottuvuutta kulloinkin tarkoitetaan. Lisäksi on selvitettävä, *miten* tämä sisällyttäminen opetukseen tapahtuu. Molempien kysymysten taustalla on erityisesti kysymys siitä, *miksi* historiaa tulisi alun alkaenkaan opettaa.

Matematiikan historian sisällyttämisestä matematiikan opetuksen osaksi ja sen merkityksestä opetukselle on keskusteltu runsaasti jo toista sataa vuotta (Shubring, 2000, s. 91–91; Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 202) ja viimeisen neljännesvuosisadan aikana keskustelu aiheesta ja tutkimus sen tiimoilta on lisääntynyt valtavasti. Seuraavassa esittelen joitakin näkökohtia viimeisen parin kymmenen vuoden ajalta.

2.2. Miksi matematiikan historiaa?

2.2.1. Kritiikki ja vastaus siihen

On toki aiheellista kysyä, miksi matematiikan historiaa tulisi yleensä opettaa. Varsinkin puitteissa, joissa matematiikka on perinteisesti pitkälti vieraannutettu historiastaan, historian mukaan tuominen vaatisi aktiivia toimenpiteitä opetuksen uudelleen suunnitteluksi ja veisi mahdollisesti paitsi aikaa, myös resursseja ”varsinaisiksi” matematiikan sisällöiksi mielletyiltä aiheilta. Kansainvälisen matematiikan historian ja opetuksen yhteyttä käsitelleen ICMI -tutkimushankkeen (International Commission on Mathematical Instruction) tuloksia yhteen vetävän kirjan artikkelissaan Constantinos Tzanakis ja Abraham Arcavi (Tzanakis & Arcavi 2000, s. 203) nostavat esille kymmenen matematiikan historian opettamista koskevaa vastalausetta ja esittelevät vastauksena näihin viisi pääargumenttia matematiikan historian opetuksessa käyttämisen puolesta. Kritiikki muodostuu heidän mukaansa (aikaisempaan tutkimukseen nojaten) pääargumenteista, joista toiset (O1-O6) torjuvat historian tärkeänä tai merkittävänä aiheena, ja toiset (O7-O10) osoittavat käytännön ongelmia matematiikan historian opettamiselle:

(O1) *Historia ei ole matematiikkaa*. Historiaa opiskellakseen on ensin osattava itse sisältö.

(O2) *Historia voi olla tuskastuttavaa* ja sekavaa sen sijaa, että se selventäisi opiskeltavaa asiaa.

(O3) *Opiskelijoilla voi olla virheellisiä käsityksiä menneestä*, jonka vuoksi matematiikan kontekstualisointi on mahdotonta ilman kunnollisia yleisen historian opintoja.

(O4) *Monet oppilaat eivät pidä historiasta*, jonka vuoksi he saattaisivat inhota matematiikkaa vieläkin enemmän.

(O5) Matematiikan kehityksen tarkoitus on tehdä ennen vaikeista ongelmista rutiinia, joten *miksi olisi syytä vaivautua katsomaan taakse*?

(O6) *Historia voi synnyttää kulttuurisovinismia* tai nurkkakuntaista nationalismia.

(O7) *Ajan puute*: koulussa on nykyiselläänkin liian vähän aikaa opiskella itse matematiikkaa, ja sitä olisi käytettävissä vieläkin vähemmän, jos samalla pitäisi opettaa myös matematiikan historiaa.

(O8) *Opetusmateriaalin puute*: edes niille opettajille, jotka haluaisivat sisällyttää historiaa opetukseensa, ei ole riittävästi materiaaleja käytettävissään.

(O9) *Asiantuntemuksen puute*: koska matematiikan historian hallitseminen vaatisi paitsi historiallista asiantuntemusta, myös monialaista osaamista, ei matematiikan opettajilta voida tätä vaatia, eihän heitä ole siihen koulutettu.

(O10) *Arvioinnin puute*: ei ole selkeää ja johdonmukaista tapaa arvioida matematiikan historiaa, ja mikäli jotain ei arvioida, oppilaat eivät arvosta sitä tai eivät kiinnitä siihen huomiota.

Vastatakseen näihin Tzanakis ja Arcavi esittävät, että matematiikan historian sisällyttämisellä opetukseen on positiivista vaikutusta

(a) matematiikan oppimiselle,
(b) matematiikan luonteen ja matemaattisen toiminnan käsitysten kehittämiselle,
(c) opettajan didaktisen repertuaarin monipuolistamiselle,
(d) matematiikkaa kohtaan koettuihin tunteisiin, sekä
(e) matematiikan kulttuurimerkityksen ymmärtämiselle.

Historia voi tukea itse matemaattisten sisältöjen oppimista (kohta a) monella tavalla. Ensinnäkin auttamalla oppilaita näkemään siistittyjen, deduktiivisesti rakennettujen matemaattisten systeemien ajatusten taakse näyttämällä, mistä ja minkälaisin käänteín nämä ovat syntyneet ja *kehittyneet*, ja siten sekä valaista opiskeltavaa asiaa että motivoida sen oppimiseen (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 204). Näin historiaa voitaisiin opettaa opiskeltaessa itse asiaa, ja jopa sitä ennen (O1, O2). Samoin historian ongelmat, joista tietyt matemaattiset ajatukset ovat kummunneet, voisivat kytkeä opiskeltavan asian sen perusteluihin luonnollisella tavalla ja välttää opiskelijoiden turhautumista sen edessä, etteivät nämä näe loogisia yhteyksiä asioiden välillä (O5). Historia voi tarjota myös oivallisen *lähteen* kysymyksille ja ongelmille. Historiasta ammentavat tehtävät näyttäytyisivät luontevampina kuin ”keksityt” tehtävät, eivätkä matematiikka ja historia olisikaan enää niin selkeästi erotettavissa toisistaan (O1).

Historiaan kytkeytyvien tehtävien korvatessa tavanomaisemmat tehtävät historia myös ujuttautuisi opetukseen vaivihkaa, tarvitsematta varata sille itselleen erikseen aikaa, nojaisihan historiallinen sisältö varsinaiseen matemaattiseen sisältöön (O7, O10). Samoin se voi avartaa matematiikan ja muiden (tieteen) *alojen välistä suhdetta*, milloin ne liittyivät toisiinsa ja milloin matematiikka on taas toiminut vain omista lähtökohdistaan. Historia voisi siten laajentaa ja monipuolistaa paitsi oppilaan, myös opettajan asiantuntemusta, ja vahvistaa tämän matemaattista sivistystä, johon selvästi kuuluu myös käsitys matematiikan suhteesta muihin aloihin (O9). Historian käyttö opetuksessa (ks. luku 1.3.) mahdollistaa myös erityisen monipuolisia opetuksen ja opiskelun muotoja, jotka eivät tavanomaisessa matematiikan opetuksessa välttämättä tule niin usein käytetyiksi, aina tiedonhausta kirjoittamiseen, analysointiin ja dokumentointiin, puhumattakaan matematiikasta *puhumisesta*. Näin historian käyttö mahdollistaisi myös *yleisempien opetuksen tavoitteiden* toteutumisen ja arvioinnin, joita kuuluu myös matematiikan opetustavoitteisiin[1] (O10). (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 204–205)

Matematiikan historia erehdysten, sinnikkyyden ja läpimurtojen historiana on myös luonteva kanava matematiikan ja sen tekemisen tapojen havainnollistamiselle (kohta b). Matematiikan *sisällöt* ovat syntyneet ja kehittyneet intuition, heuristiikkojen, erehdysten ja virheiden korjaamisten kautta, joten on tärkeää oppia, että myös nämä kuuluvat matematiikkaan, ja parhaimmillaan erheetkin opettavat paljon (O5). Myös eri aikakausien tavat tehdä matematiikkaa so. todistaa, merkitä, ilmaista ja havainnollistaa kuvina tai sanoin matematiikkaa koskevia ajatuksia, voivat laajentaa ja rikastuttaa oppilaiden näkemystä heidän omaksumansa matematiikan luonteesta. Tämä voi myös rohkaista oppilaita itseään tekemään otaksumia ja tutkimaan niiden paikkansapitävyyttä, erehtymisenkin uhalla (O4). Menneisyyden epäselvältäkin vaikuttavien merkintöjen tai selitysten huolellinen selvittäminen esimerkiksi alkutekstien johdatuksella voi myös lisätä nykyisten merkintöjen ja sisältöjen selkeyden arvostusta (vrt. O2). (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 205–206)

[1] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003: mm. *"rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin […] ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä"* (LOPS, 2003, s. 118–119);*"tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä"* (LOPS, 2003, s. 125);
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004: mm. *"Matematiikan merkitys on nähtävä laajasti – se vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen sekä edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta"* (POPS, 2004, s. 158).

Myös opettajan didaktisen tietotaidon näkökulmasta (kohta c) historia voi kytkeytyä erityisen vahvasti matematiikan sisältöjen opettamiseen, sillä historia auttaa myös opettajia tunnistamaan uusien matemaattisten käsitteiden ja aihealueiden tutustumiseen motivoitumista tarjotessaan tyyppiesimerkkejä kyseisiä matematiikan sisältöjä alkujaan esiin nostaneista ongelmista (O1, O5). Historian tarjoamat esimerkit voivat edelleen vahvistaa opettajan kykyä tiedostaa ja ennakoida uusien sisältöjen omaksumiseen liittyviä vaikeuksia (O2), sekä mahdollistaa monipuolisempien selitystapojen ja havainnollistusten myötä rikkaamman didaktisen repertuaarin (O1). (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 206)

Esimerkkinä historiallisen ymmärryksen merkityksestä opettajille käy Bruckheimerin ja Arcavin huomio koulukeskeisestä matematiikkakuvasta. Kehittäessään matematiikan historiaa hyödyntävää oppimateriaalia ja tähän liittyen opettajille suunnattua kurssia negatiivisista luvuista, he tekivät pienen esikäsityskartoituksen siitä, millaisia käsityksiä opettajilla negatiivisten lukujen historiasta on. He havaitsivat opettajilla kaksi keskeisesti koulutukseen pohjautuvaa käsitystä matematiikan historiasta: ensinnä sen, että varhain koulussa opiskeltavat asiat juontaisivat samoin varhaiseen historiaan, ja toiseksi, että matemaattiset käsitteiden formaali määrittely edeltäisi niiden käyttöä historiallisesti (Bruckheimer & Arcavi, 2000, s. 138). Koulukeskeiseen matematiikkakuvaan tarrautuminen voi pahimmillaan estää näkemästä matematiikan käsitteiden hahmottamisen ja käytön taustalla piileviä intuitiivisia rakenteita. Opettajan olisi hyvä ymmärtää myös näitä seikkoja, formaaliin määrittelyyn perustuvan systeemin rakennuksen rinnalla uusia käsitteitä opetettaessa.

Näyttämällä matematiikan kehittyvänä ja inhimillisenä toimintana eikä vain lukkoon lyötyjen totuuksien systeeminä, ylhäältä annettuna valmiina ja sellaisenaan omaksuttavana tuotteena, vaan ihmisten älyllisten ponnistusten tuloksena, jotka ovat vaatineet niin kyselemistä, tutkimista kuin epäonnistumisiakin, historia voi tarjota edelleen helpotusta matematiikkaa kohtaan tunnettuun epäluuloon, epävarmuuteen ja vierastamiseen tarjoamalla erilaisia matemaattisen toiminnan roolimalleja (kohta d). Kysymisen, ihmettelyn ja kokeilemisen vapauden myötä mahdollistuu myös vapautuneempi ja rohkeampi suhtautuminen matematiikkaan (O2, O5). (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 206–207)

Lopulta matematiikan historia avaa väylän matematiikan kulttuurisen merkityksen ymmärtämiselle (kohta e). Sen ymmärtämiselle, ettei matematiikka ole ollut vain hyötynäkökulman sanelemaa, vaan sitä on harjoitettu ja harjoitetaan myös sen itsensä tähden. Että matematiikan harjoittamista ajavat niin esteettiset kriteerit, älyllinen uteliaisuus, haasteet ja niistä saatu mielihyvä kuin harrastuneisuuskin. Ja kuinka sekä hyötynäkökohtiin että puhtaasti matemaattisiin syihin usein on liittynyt kulttuurillisia ja sosiaalisia tekijöitä (O4). Matematiikan monikulttuurinen historia voi myös lisätä opiskelijoiden arvostusta myös toisia kulttuureita ja näiden saavutuksia kohtaan (O6). (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 207)

Edellä esitellyn nojalla historian harkittu ja asiantunteva sisällyttäminen matematiikan opetukseen vastaa yleisimpiin vastustuksen tai epäilyn aiheisiin ja on siten hyödyksi sekä opettajalle että opiskelijalle. Kuitenkin, etenkin opettajan näkökulmasta, suurimmiksi ja reaalisimmiksi haasteiksi nousevat käytännön kysymykset resurssien ja opettajien asiantuntemuksen riittävyydestä (O8, O9) (Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 207). Näitä kysymyksiä käsitellään hieman tuonnempana, kappaleessa 2.3 teoreettisesta näkökulmasta, sekä luvussa 3 opettajien näkökulmasta.

Uffe Thomas Jankvist on ICMI-raportin ja erityisesti Tzanakiksen ja Arcavin artikkelin pohjalta analysoinut matematiikan historian opettamiseen liittyvien perusteluiden luonnetta ja jakaa perustelut matematiikan historian sisällyttämiseksi opetukseen kahteen perussyyhyn:

(i) *matematiikan historia välineenä*, eli historian opettaminen tai historian käyttäminen opetuksessa matematiikan sisältöjen oppimisen tueksi tai tehostamiseksi

(ii) *matematiikan historia tavoitteena*, eli historian opettaminen sen itsensä vuoksi

(Jankvist, 2009a, s. 237–238)

Seuraavassa lyhyt katsaus Jankvistin luokitteluun.

2.2.2. Matematiikan historia välineenä

Ensimmäinen Jankvistin mainitsemista syistä on sekä tavallisesti yleisemmin käytetty perustelu että useimmiten varsinaiseen opetukseen heijastuva näkemys. Taustalla on ajatus siitä, että matematiikan sisältöjen oppimista voidaan tehostaa joko historian esimerkkejä, alkutekstejä tai historiasta lainattuja näkökulmia ja lähestymistapoja käyttämällä. Myös opetuksen elävöittäminen ja kiinnostuksen herättäminen esimerkiksi henkilöhistorioita tai anekdootteja hyödyntämällä tähtää usein juuri parempiin matematiikan oppimistuloksiin. Näissä tapauksissa matematiikan historia nähdään siis *välineenä* ”varsinaisen matematiikan” opettamiseksi ja oppimiseksi.

Matematiikan historian välinekäytöllä on siis useita toisistaan poikkeavia ja omalla tavallaan tärkeitä muotoja. Näitä voivat olla niin *kiinnostuksen herättäminen* ja *jännittävyyden lisääminen* poikkeavan lähestymistavan tai jännittävän kontekstin kautta (ks. tämän tutkielman kohta 2.2.1a), *motivointi* aitojen historiallisten kysymystenasettelujen kautta (2.2.1a), *matematiikan inhimillistäminen* eli inhimillisten kasvojen antaminen matematiikalle ja siten vähemmän pelottavaksi tekeminen ja oppimaan rohkaiseminen (vrt. 2.2.1d) kuin *kognitiivisen välineen* tarjoaminen asioiden selkiyttämiseksi ja selittämiseksi eri tavoilla ja eri näkökulmista. Tällöin historia toimisi välineenä katsoa matematiikkaa ”oppilaan silmin”, näkökulmasta jossa käsitteet ja niiden käyttö tulevat uusina ja vieraina vastaan ja tarjota uusia näkymiä ja lähestymistapoja ongelmien selättämiseksi. Historiasta voisi löytää siten niin tyyppiongelmia niiden ennakoimiseksi, kuin myös konkreettisia etenemisväyliä ongelmatilanteisiin (2.2.1c). Lisäksi on ajateltavissa vielä historian tarjoama *evolutiivinen kehys* oppimiselle (2.2.1c). Tällaisella parallelismilla tarkoitetaan enemmän tai vähemmän historiallisen kehityskulun seuraamista matematiikan opetuksessa, sen etenemisjärjestyksessä ja käsitteiden käyttöönotossa: historian ”toistamista” oppimisprosessissa, vaihtoehtona nykyiselle formaalille systeemille (vrt. Bruckheimer & Arcavi, 2000, s, 138). (Jankvist, 2009a, s. 237–238 ja 241–243; Jankvist, 2009b, s. 21–22).

Matematiikan välinekäyttö liittyy siis erityisesti matematiikan ”sisäisiin kysymyksiin” *(”in-issues”)*, kuten Jankvist niitä nimittää, siis matematiikan käsitteiden ja käytön oppimiseen. Näin ollen matematiikan historian perustelua matematiikan sisältöjen oppimisen edistämiseksi voidaan lähestyä juuri historian välinekäytön argumenttien näkökulmasta ja niiden tarjoamien väylien kautta. Toisen ulottuvuuden matematiikan historian merkitykselle tarjoaa argumentti matematiikan historian merkityksestä päämääränä sinänsä.

2.2.3. Matematiikan historia tavoitteena

Kuten jo kappaleessa 2.2.1. esitettiin, on ajateltavissa toinenkin syy matematiikan historian opettamiselle, nimittäin se itsensä merkitys. Tämä ei siis tarkoita niinkään historian opettamista pelkästään historiallisten faktojen sinänsä oppimiseksi (vrt. vanhahtava käsitys historiasta kouluaineena), vaan laajemmin matematiikan historiallisen merkityksen ymmärtämiseksi, siis matematiikan luonteen (2.2.1b) ja erityisesti sen luonteen inhimillisenä toimintana esille nostamiseksi. Sekä matematiikan kehityksen historiallisten kontekstien tarkastelu ja suhteet muihin inhimillisen toiminnan aloihin, että matemaattisten käsitteiden ja käsitysten heijastelu ajattelun kulloisissakin tavoissa sisältyvät edellä mainittuun (2.2.1e). Erona historian välinekäyttöön, joka todettiin nimenomaan matematiikan sisältöjen opetukseen liittyväksi, matematiikan historian tavoitesuuntautuneisuudella on enemmänkin meta-luonne (*"meta-issues"*), matematiikan ja sen historian tarkastelu matematiikan toiminta-alaa ja sisältöjä yleisemmällä tasolla. On toki huomattava että matematiikan historia ei kata *koko* meta-matemaattista tarkastelukenttää, vaikka mahdollistaakin moniulotteisen tarkastelukulman, esimerkiksi filosofian merkitykselle matematiikassa, ovathan monet historian matemaatikot olleet myös filosofeja, matematiikan ja filosofian kytkeytyessä toisiinsa elimellisesti (Jankvist, 2009a, s. 21–22; Jankvist, 2009b, s. 298; Jahnke, 2000, s. 296).

Näin matematiikan historia voisi nostaa esiin niin matematiikan yhteiskunnallista merkitystä eri kulttuureissa ja eri aikakausina, kuin erilaisten matematiikkakäsitysten ja ideaalien kytkeytyneisyyttä erilaisiin ajattelun muotoihin.

2.2.4. Historia matematiikan inhimillistäjänä ja meta-matemaattiset kysymykset

Matematiikan kytkeytyminen koulumaailmassa usein teknilliseen soveltavaan viitekehykseen lienee eräs niistä syistä, joiden tähden kiinnostuksessa matematiikkaa kohtaan voi syntyä railo sukupuolten välille. Väitetään esimerkiksi, että tytöt menettävät kiinnostuksen matematiikkaan 16 vuoden iässä, sillä sen koetaan käsittelevän ”asioita, ei ihmisiä” (Schubring, 2000, s. 105). Tämänkaltaisen vieraannuttavan elementin häivyttämiseen voidaan nähdä vastaus ja keinoja historiallisessa lähestymistavassa. Historian avartava vaikutus voidaan nähdä joko välineenä oppimaan motivoimisessa taikka päämääränä itsessään: matematiikan tradition inhimillisen, humanistisemman puolen esiin nostajana. Sukupuolen huomioonottavana pyrkimyksenä historian sisällyttäminen matematiikan opetukseen voisi siten edesauttaa sukupuolisensitiivisempää matematiikan opetusta.

Samoin monikulttuurisista lähtökohdista matematiikan kysymysten taustojen kulttuurisidonnaisuuden ja monimuotoisuuden esiin nostamiseksi historiallinen lähestymistapa antaa erinomaisen pohjan. Matematiikan monipolviset vaiheet eri kulttuuripiirien sisällä ja välillä avaavat (matematiikan) maailmaa tavalla, joka ilman historiallista lähestymistapaa ei liene mahdollista. Näiden kulttuurillisten tekijöiden ja taustavaikutusten selvittäminen voivat sekä olla itsessään päämääriä, mutta auttaa myös monikulttuurisen taustan omaavia oppilaita motivoitumaan opiskelemaan, innostamalla luovuuteen, omien ajattelun vahvuuksien käyttämiseen (Grugnetti & Rogers, 2000, s. 46). Samalla oman kulttuuripiirin ulkopuolelle näkeminen ja muiden kulttuurien saavutusten huomaaminen toimivat kuin itsessään monikulttuurisuuskasvatuksena (Grugnetti & Rogers,2000, s. 46; Tzanakis ja Arcavi, 2000, s. 207). [2]

Edelleen monet meta-matemaattiset kysymykset ja niiden pohtiminen erityisesti historiallisesta näkökulmasta voivat paitsi auttaa opiskelijaa muodostamaan monipuolisemman ja joustavamman kuvan matemaattisista rakenteista ja sitä kautta lisätä tämän ymmärrystä aiheesta. Mutta yhtä lailla meta-matemaattisten kysymysten herääminen ja käsittely jo itsessään voidaan nähdä opetuksellisena pyrkimyksenä, sikäli kuin tarkoitus on lisätä opiskelijan matemaattista sivistystä laajemmassa merkityksessä ja herättää tämä pohtimaan opiskelemiensa asioiden suhdetta laajempaan kokonaisuuteen ja inhimillisen toiminnan muihin osa-alueisiin ja eri aikakausina ja eri yhteyksissä vallinneisiin käsityksiin ja näiden perusteluihin. Matematiikan historia voikin toimia erityisen hedelmällisenä alustana esimerkiksi sen pohtimiselle, ovatko matemaattiset totuudet jotain, joita *keksitään* vai joita *löydetään*. Historian kautta

[2] Kulttuuriantropologian ja matematiikan historian rajamaastoa tutkii *etnomatematiikkana* tunnettu ala, ks. esim. (D’Ambrosio, 1985)

opiskelijoille voidaan selvemmin avata niitä historiallisia yhteyksiä ja olosuhteita joissa matematiikkaa on *harjoitettu*, ja siten auttaa näitä ymmärtämään paremmin matematiikan prosessiluonnetta. Vaikka matemaattiset rakenteet sinänsä ajateltaisiinkin kokemuksesta riippumatta olemassa oleviksi, historian kautta valkenee kuva *käsitteiden keksimisten*, hiomisten ja laajentamisten prosesseista heränneisiin kysymyksiin vastaamisessa, sekä näiden käsitteiden lainalaisuuksia koskevien lauseiden ja niiden todistamisten löytämisten prosesseista näiden kysymysten ratkaisemiseksi (Grugnetti & Rogers, 2000, s. 45). Historiansa kautta matematiikkaa siten hahmottuu inhimillisen ajattelun ja toiminnan prosessien ja itsessään olemassa olevien rakenteiden yhteennivoutumana. Näiden prosessien ja ihmisestä riippumattomien totuuksien metamatemaattisen kysymisen ja pohtimisen valmius voidaan sellaisenaan nähdä itsessään arvokkaana sivistyksenä, mutta lisäksi niiden syvällisempi ymmärtäminen auttanee opiskelijaa myös jäsentämään omaksumiaan tietojaan ja taitojaan entistä paremmin ja käyttämään näitä joustavammin itse harjoittamansa matematiikan (so. matemaattisen toiminnan) tukena.

Pohdittaessa matematiikan historian roolia kouluopetuksessa on siis paitsi oltava tietoisia niistä matematiikan historian ulottuvuuksista, joita kulloinkin opetukseen pyritään tuomaan. Erityisesti kysymys matematiikan historiasta välineenä vs. itsessään arvokkaana sisältönä on myös sivistyspoliittinen kysymys: minkälaista matematiikkakuvaa ja minkälaisia matematiikan valmiuksia opetuksella pyritään tuottamaan ja vahvistamaan, ja mikä arvo ja rooli matematiikalla nähdään tulevaisuuden yhteiskunnassa ja kulttuurissa. Yksittäiselle opettajalle merkittäväksi nousee kysymys siitä, kuinka paljon matematiikan opetukseen on tuotavissa opetussuunnitelmaan kuulumattomia elementtejä kasvatuksellisten, koulutuksellisten ja sivistyksellisten tavoitteiden saavuttamiseksi. Uusia opetussuunnitelmia suunniteltaessa ja käyttöönotettaessa, kuten lähivuosien Suomessa, on matematiikan osalta mahdollista harkita myös täysin uudenlaisia lähestymistapoja matematiikan rooliin, ja edellä esitellyn perusteella matematiikan historian esiin nostamilla kysymyksillä on mahdollisesti merkittävä rooli suunnan hahmottumisessa.

Mutta perusteet eivät yksin riitä, ja siksi onkin tarkasteltava paitsi miksi, myös millä tavoin matematiikan historia olisi opetukseen tuotavissa. Näitä keinoja kartoitettaessa ja toteutettaessa mahdolliset (esimerkiksi kohdassa 2.2.1. esitellyn kaltaiset) ongelmat on otettava vakavasti.

2.3. Miten matematiikan historiaa voidaan tuoda opetukseen?

2.3.1. Kolme tapaa

Paitsi että Jankvist luokittelee syitä historian sisällyttämiselle matematiikan opetukseen ja jakaa nämä kahteen leiriin, välineisiin ja tavoitteisiin, hän tekee myös jaottelun eri tavoille sisällyttää matematiikan historiaa opetukseen (Jankvist, 2009a, s. 245). Jankvistin kolmikko muodostuu kolmesta eritasoisesta tavasta:

1) valaisevat tavat *(illumination approaches)*,

2) opetuksen moduulit *(modules approaches)*, sekä

3) historiaan pohjautuva eteneminen *(history-based approaches)*.

Luonnollisesti Jankvistin luokittelu on vain eräs näkökulma matematiikan historian sisällyttämiseen opetukseen, mutta on yleisempänä luokitteluna käyttökelpoinen[3].

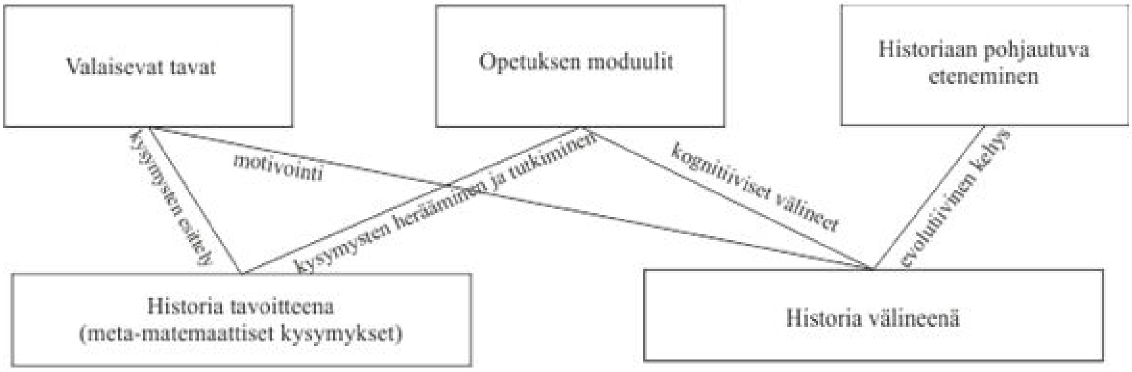
Ensimmäisellä tavoista, valaisemisella, Jankvist tarkoittaa kaikenlaisia varsinaisen matematiikan sisältöjen *lisäksi* käsiteltäviä historiallisia aineistoja ja esittämisen tapoja, lähtien aina eristetyistä faktoista (”nippelitiedosta”) kuten vuosiluvuista, taulukoista, anekdooteista, henkilöhistorioista ja kuuluisista ongelmista laajempiin sisällön kontekstualisointeihin, prologeihin ja epilogeihin. Tällaiset valaisevat sisällöt ovat tyypillisiä oppikirjoille, joissa historia esiintyy usein höysteenä ”varsinaiselle asialle”: alaviitteissä, marginaaleissa, välipaloina ongelmia tai historiallisia henkilöitä esitellen, mahdollisesti johdantoina tai jälkipuheina, joissa itse matemaattinen sisältö viedään historialliseen kontekstiin, motivoiden, selittäen ja kiinnostusta herättäen (Jankvist, 2009a, s. 245–246). Usein valaisemisella pyritään motivoimaan, tarjoamalla keventäviä tai mielenkiinnon herättäviä näkökulmia tai tarinoita ja siten toimimaan varsinaisten matemaattisten sisältöjen oppimisen edistämisessä (historia

[3] Myös esimerkiksi Tzanakis ja Arcavi (2000, s. 214) listaavat erilaisia tapoja, mutta heidän listansa on pikemminkin luettelo tavoista, ei niinkään yritys luokitella niitä.

välineenä), mutta etenkin laajimmillaan, esimerkiksi epilogien tms. muodossa, myös meta-matemaattisten kysymysten käsittely (historia tavoitteena) on mahdollista. Kuitenkin tapa mahdollistaa enimmillään vain meta-matemaattisten kysymysten olemassaolon ja luonteen esittelyn, ”valaisemisen”, muttei tarjoa juuri keinoja oppilaille itselleen työstää näitä kysymyksiä.

Opetuksen moduuleilla voi niin ikään olla hyvinkin erilaajuisia ilmenemismuotoja. Moduulit ovat opetuksessa käytettäviä kokonaisuuksia sisältöjen opettamiseen ja oppimiseen historian kautta. Suppeimmillaan tällä voidaan tarkoittaa parin oppitunnin kattavia ”paketteja” (vrt. Bruckheimer & Arcavi, 2000), jonkin kysymyksen, kapean opetussuunnitelman sisällön opiskelua historiallisen aineiston puitteissa, laajimmillaan aina kokonaisia kursseja ja kirjoja, joiden matemaattisen sisällöt on kytketty historiallisiin aineistoihin ja niiden tutkimiseen. Laajojen moduulien tuotokset voivat olla esimerkiksi opiskelijoiden tutkimustöitä, joissa sisältöjä opiskellaan niiden historiaan liittyvien aineistojen tutkimisen ja tulkinnan kautta. Moduulit ovat näin ollen suppeammin tai laajemmin rajattuja kokonaisuuksia historian tarjoamien aineistojen käyttämiselle matematiikan opettamiseksi ja oppimiseksi (Jankvist, 2009a, s. 246), ja tarjoavat sekä mahdollisuuden työstää meta-matemaattisia kysymyksiä sekä rajatummin (opetussuunnitelmaan sidottuina kokonaisuuksina) että syvällisemmin (erityisesti laajempina kokonaisuuksina), myös niin ikään kognitiivisen välineen matemaattisten sisältöjen oppimiseksi.

Kolmas Jankvistin esittelemistä matematiikan historiaa hyödyntävistä opetuksen tavoista on historiaan pohjautuva, mutta mahdollisesti itse historiaa esittelemätön opetuksen tapa. Historiaan pohjautuva eteneminen ei siten, verrattuna esimerkiksi moduuleihin, viittaa historiaan tai tuo sitä esille suorasti, vaan pikemminkin epäsuorasti, upotettuna itse opetuksen muotoon ja sisältöihin. Esimerkiksi lukualueiden opettaminen luonnollista luvuista lähtien, kokonaislukuihin ja positiivisiin rationaalilukuihin sekä joihinkin positiivisiin irrationaalilukuihin edeten, ja vasta tämän jälkeen nollan ja negatiiviset kokonaisluvut esitellen, ja lopulta laajentaen negatiivisiin reaalilukuihin ja kompleksilukuihin, on esimerkki historiaan pohjautuvasta opetuksen etenemisestä (Jankvist, 2009a, s. 247). Tällöin historia tarjoaa erityisesti kognitiivisia välineitä ja evolutiivisen kehyksen matematiikan opettamiseksi ja oppimiseksi (historia välineenä).



Kuva 1. Erilaisten historian opetukseen sisällyttämisen tapojen ja historian käytön syiden välisiä yhteyksiä

Esimerkkinä historiaan pohjautuvasta tavasta Jankvist esittelee muun muassa Hans Freudenthalin *ohjatun uudelleenkeksimisen* (*guided reinvention*). Freudenthal erottaa tämän tavasta, jossa historian kautta oppilaan oletetaan omaksuvan matemaattisia sisältöjä, ja korostaa sen sijaan oppilaiden aktiivista roolia, jolloin historiaa käytetään apuna ”matematisoinnin” eli matemaattisen asioiden organisoinnin uudelleenkeksimisen tukena, tarjoamalla oppilaille puitteet löytää ja keksiä omia tapojaan edetä ongelmakohdissa. Näin oppimisprosessin ei täydy toistaa historiallisia prosesseja sellaisinaan vaan pikemminkin ”kuin menneisyyden ihmiset olisivat tienneet hieman enemmän siitä mitä me tiedämme tänä päivänä” (Freudenthal, 1991; Jankvist, 2009a, s. 248–249). Tällaisella oppilaslähtöisellä opetuksen tavalla on myös huomattava yhteys siihen, mitä Arcavi ja Isoda (2007) tarkoittavat konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen kytkeytyvällä oppilaan *kuuntelemisella*: oppilaan oman näkökulman ja omien oivaltamisen ja ilmaisun tapojen arvostamisella ja ymmärtämisellä.

2.3.2. Historialliset lähteet opetuksessa

Eräs konkreettisimmista keinoista tuoda matematiikan historia luokkahuoneeseen ja opetukseen, on historiallisen matemaattisen aineiston, alkuperäisten lähteiden, tekstien, kuvien ja ongelmien käyttö opetuksessa. Autenttisuudestaan huolimatta, tai ehkäpä juuri sen vuoksi, alkuperäiset lähteet eivät kuitenkaan ole ongelmattomia, vaikkakin parhaimmillaan erittäin palkitsevia käytettäviä.

Kuten historian sisällyttämisen opetukseen yleensäkin, lähteisiin pohjautuvan opiskelun voidaan nähdä tarjoavan ainakin kolme keskeistä etua: *tavanomaisen korvaa-*

minen totutusta poikkeavalla, *uudelleensuuntautuminen* annettuna ottamisesta oivallusten havaitsemiseen, sekä matematiikkaan liittyvän *kulttuurillisen ymmärryksen* rikastuminen. (Jahnke, 2000, s. 291–292). Korvaamalla tavanomainen, totuttu esitystapa ”vanhahtavalla” ja mahdollisesti vaikeallakin, mutta poikkeavan näkökulman tarjoavalla alkutekstillä, mahdollistuu opiskeltavan asian näkeminen muutenkin kuin kiveen hakattuina sääntökokoelmina aivan uudella tavalla. Sen ymmärtäminen, kuinka nykyään jopa itsestäänselvyyksinä opetetut matematiikan käsitteet ja ajattelun tavat ovat älyllisen toiminnan ja romutettujen ajattelutapojen hedelmiä, kovia ponnistuksia vaatineita oivalluksia ja kuinka matematiikka on elänyt ja elää kautta aikojen, haastaen totuuskäsitysten ja matemaattisten käsitteiden muuttumattomuuden, voi tuoda uutta väriä opiskeltaviin sisältöihin ja avartaa näiden suhdetta inhimilliseen ajattelun ja toiminnan kulttuuriin, sijoittamalla nämä aikaan ja paikkaan, yhteiskunnalliseen ja tieteelliseen kontekstiin. Tällaisia konteksteja voivat olla muun muassa eri aikakausien kriisit ja joidenkin nykyaikana luontevampien käsitteiden epäily, esimerkkinä vaikkapa irrationaalilukuja ja rationaalilukujen ääretöntä desimaaliesitystä kohtaan koettu epäluulo 1500–1600-luvuilla.

Siinä missä valmiiksi pureskeltu, toisen käden aineisto tarjoaa valmiin tulkinnan ja sitä myöten matalan kynnyksen käyttöönotolle, tulkinta väistämättä ohjaa asian jäsentymistä ja käsityksen muodostamista. Alkuperäisiä lähteitä käytettäessä lukijan omalle tulkinnalle ja siten mielikuvitukselle ja luovuudelle jää enemmän liikkumavaraa, mutta liian vieras konteksti voi muodostua esteeksi tarkastelun lähtökohtien puuttuessa. Alkutekstien käytössä erityisen tärkeää onkin juuri kontekstin ymmärtäminen, ja opetuksessa asioiden kontekstualisointi. Jotta positiivinen ”kulttuurishokki” eli tavanomaisen korvaaminen sekä ajattelun ja huomioiden uudelleensuuntaaminen olisi mahdollista, on vältettävä ennakkokäsityksiin pohjautuvaa arvostelevaa, päämäärähakuista luentatapaa, ja pyrittävä sen sijaan *ymmärtämään* sanottua. Juuri ymmärtämiselle otollisen pohjan luomiseksi kontekstualisoinnilla on keskeinen merkitys (Jahnke, 2000, s. 293). Jahnke korostaakin matematiikan historian ja alkutekstien hermeneuttista kehää, jossa lukijan on tulkitessaan historiallista tekstiä tehtävä tulkintaa paitsi tarkasteltavasta tekstistä myös omasta tulkinnastaan, siis koeteltava muodostamiaan käsityksiä ja keskusteluteltava näitä yhä uudelleen tekstin kanssa. Tekstin ymmärtävään lukemiseen kuuluu siis sen kirjoittajan sekä myöhemmän lukijan ja seuraajan nahkoihin vuoronperäinen asettuminen ja näkökulmien vuorottelu. Myös jo aiemmin mainitussa Arcavin ja Isodan kuuntelevassa ymmärtämisessä on kyse samasta: kuuntelija, joutuessaan punnitsemaan omaa suhdettaan aiheeseen, oppii ja hyötyy kuuntelemisesta itsekin (Arcavi & Isoda, 2007, s. 112). Arcavi ja Isoda toteavatkin analogisuuden alkutekstien ymmärtämisen ja oppilaiden kuuntelemisen taitojen välillä ja tarjoavat juuri historiallisten aineistojen ymmärtämisen välineitä oppilaiden kuuntelemisen ja ymmärtämisen tueksi (2007, s. 115).

Opettajan olisikin hyvä kyetä liikkumaan joustavasti näiden molempien tasojen välillä ja olla tietoinen tästä. Mutta oppilaalta samaa ei voida olettaa ja siksi juuri kontekstin ja kielellisen ketteryyden hallitsemisen muodostaakin suuren haasteen. Sillä siinä missä matematiikan ymmärtämisessä keskeinen osaaminen piilee oman kielenkäytön (tapa puhua matematiikasta) ja matemaattisen kielen (nykyinen formaali matematiikan kieli) välisessä joustavuudessa, historiallisen tekstin ymmärtämisen avain on pitkälti historiallisen kielen ja nykyaikaisen kielen välisessä vuoropuhelussa. Vuorovaikutuksessa ovat tällöin kolme tapaa puhua ja kirjoittaa: oma, matemaattinen ja historiallis-matemaattinen. Yhtenä historiallisten aineistojen käytön kasvatuksellisena tavoitteena voisikin olla juuri tällaisen luku- ja puhetaidon kehittäminen, paitsi siis matematiikan verbalisointi, myös eri puhetapojen tunnistaminen ja liikkuminen niiden välillä. Nopeasti muuttuvassa maailmassa tämänkaltainen joustavuus on kallisarvoista, sillä se mahdollistaa paitsi menneisyyden ymmärtämisen, myös antaa eväät kommunikointiin tulevaisuuden matematiikan ja sen tekijöiden kanssa (Jahnke, 2000, s. 298–299).

Mainittu kolmen kielen vuoropuhelu tarjoaa didaktisen tulokulman historiallisten aineistojen käytölle. Lukijan ja tekstin kommunikoinnin mahdollistava konteksti voidaan tällöin nähdä paitsi huomioitavana puitteena, myös itsessään pohdittavana kysymysten herättäjänä. Mutta tämä on lopulta vain yksi historiallisen lähteen tarjoamista didaktisista strategioista. Jahnke (2000) listaakin mittavan valikoiman erilaisia historiallisten lähteiden käsittelymahdollisuuksia:

(i) *lähteen esittely* suoraan tai epäsuorasti (johdattelevan aktiviteetin siivittämänä), ilman kontekstualisointia poikkeavuudella ”shokeeraaminen” tai tavallisuudesta poikkeavien ongelmien kautta historiaan perehtyminen;

(ii) *lähteen analysointi*, joka vaatii huolellisen harkinnan kysymyksenasettelusta, eli tapahtuuko se valmiiden kysymysten pohjalta vai oppilaiden itsensä pähkäilystä lähtien, mikä saattaa johtaa jopa kognitiiviseen keskusteluun so. pohdintaan perustelujen ja päättelyjen vahvuutta;

(iii) matemaattisten (tai fysikaalisten) *mittausvälineiden konstruointi*;

(iv) *päättelyn verbalisointi*, joka paitsi opettaa huolelliseksi ei-formaalin matematisoinnin kanssa, myös avaa päättelyitä aivan toisella tavalla ja lisäksi antaa opettajalle mahdollisuuden huomioida ja puuttua virhekäsityksiin;

(v) *tekstin kääntäminen* (historiallisesta modernille matematiikan kielelle tai yhdeltä kieleltä toiselle), jolloin oppilas joutuu paneutumaan merkityksiin huomattavalla huolella;

(vi) *päättelyn oikeellisuuden tutkiminen* ja tarkistaminen;

(vii) saman tai eri aikakauden saman tai eri aiheen keskinäinen *vertailu*, joka osoittaa paitsi kielen, myös merkintöjen ja esitystavan kehityksen ja toisaalta auttaa keskittymään oleelliseen sisältöön;

(viii) *kotitehtävät*, joiksi on hyvä valita tehtäviä jotka syntetisoivat (esim. yllä olevin menetelmin) opittua.

Eräs keskeinen haaste alkutekstin käytölle opetuksessa on kääntämisen ongelma. Jotta tekstiä olisi mahdollista käyttää osana opetusta, olisi sen oltava lopulta ymmärrettävissä, ja totutusta poikkeava kielenkäyttö on jo itsessään haaste lukijalle, puhumattakaan vieraasta kielestä. Vaikka tekstin kääntäminen olisikin alkutekstin tarkastelun menetelmä, ei tekstin kieli voi olla liian vierasta tai hankalaa. Viime kädessä tämä tarkoittaa, että tekstistä olisi oltava käytettävissä joko omalla äidinkielellä tai muulla lähes yhtä hyvin ymmärretyllä kielellä kirjoitettu versio, tai sitten tarkoitustaan palveleva käännös tai muuta apuvälineistöä kääntämisen tueksi.

Jotta siis alkuperäisten lähteiden käyttö opetuksessa olisi onnistunutta, on opettajan valmistautumisella suuri merkitys. Sekä opettajan oma koulutus- ja perehtyneisyyshistoria – eli mikä on opettajan oma ymmärrys matematiikan historiasta yleensä ja sisältöaluekohtaisesti – että kunkin elementin käyttöönottoa pohjustava valmistelutyö ja perehtyminen muodostavat edellytykset onnistuneelle matematiikan historian opetukselle ja erityisesti alkutekstien käytölle.

Mutta on tärkeää huomata myös muiden kuin käsiteltävien matematiikan käsitteiden syntyajankohtaan sijoittuvien lähteiden käyttämisen mahdollisuus ja edut: samoin kuin alkulähteet tarjoavat poikkeavia näkökulmia opiskeltavaan ja opetettavaan asiaan, sitä voivat tarjota myös vanhat oppimateriaalit (Jahnke, 2000, s. 297). Muuttuneiden pedagogisten ja didaktisten trendien mukana ovat myös oppimateriaalit, erityisesti oppikirjat, muuttaneet muotoaan, sisältöään ja esitystapaansa aikojen saatossa. Kuten alkulähteitä tutkimalla, myös vanhoihin oppikirjoihin paneutumalla voi lukija joutua muuttamaan totuttuja ajattelun muotojaan, haastamaan itsensä ja mahdollisesti havahtua uuden näkökulman omaksumiseen. Omalla kielellä kirjoitettujen vanhojen oppikirjojen etu on myös käännöksen ongelman väistämisessä, joka varsinkin suomen kaltaisten tieteen tekemisen kielinä varsin nuorten kielten kohdalla on aito haaste.

2.4. Matematiikan historian merkitys opettajalle

Kuten Schubring huomauttaa, matematiikan historialla ei vielä viime vuosisadan puolenvälin tienoilla yleisesti nähty juuri muuta arvoa kuin kulttuurillis-historiallisen kuriositeetin merkitys, matematiikan näyttäytyessä tarpeettomat osat hylänneenä ja kohti täydellisyyttä kurottautuvana rakennelmana, jonka ei olisi tarpeellista tai edes hyödyllistä roikottaa muassaan erillistä ”historiallista painolastia”. Matematiikan historialla olisi arvoa lähinnä oppilaiden innostamisessa ja intohimojen herättämisessä. Tämän näkemyksen voi sanoa kääntyneen suorastaan päälaelleen viimeisten muutamien kymmenien vuosien kuluessa, kun alan tutkimuksissa on alettu kiinnittää huomiota historiallisen näkökulman merkitykseen oppilaan lisäksi myös opettajalle. Kun aikaisempi katsantokanta näki matematiikan historian lähinnä opetuksellisena höysteenä, se keskittyi lähinnä historian motivoimismerkitykseen ja jätti huomiotta tämän merkityksen opettajan omalle ymmärrykselle matematiikasta. Nyt keskusteluun ja tutkimukseen on tullut myös vahva painotus historiallisten osasten käytöstä opettajien itsensä ymmärryksen ja ammattitaidon kartuttajana ja vahvistajana. (Schubring, 2000, s. 92–93). Tähän liittyy myös aiemmin (kappaleessa 2.2.1) mainittu opettajien koulukeskeinen kuva matematiikasta: näkemys siitä, että opetuksessa toisintuisi matematiikan historiallinen kehityskulku, että opittu järjestys formaalisti määritellä käsitteitä ja sitten käyttää niitä kuvastaisi matematiikan historiallista kehitystä, miten ei luonnollisestikaan ole, kuten Bruckheimer ja Arcavi (2000, s. 138) esimerkiksi negatiivisten lukujen tapauksessa huomauttavat. Siis, paitsi että historia tarjoaa oppilaille ja opiskelijoille väylän ja keinoja nähdä matematiikkaa eri kuvakulmista ja sijoittaa se laajempaan inhimillisen toiminnan kontekstiin ja siten syventää käsityksiä matematiikan luonteesta (esim. Jahnke, 2000), tämä pätee luonnollisesti myös opettajiin (Furinghetti, 2007, s. 133).

Siksi matematiikan historian merkitys opettajakoulutuksessa ei ole tärkeää vain oppilaille suunnattavien elementtien käytön oppimiseksi, vaan myös opettajien itsensä kokonaisvaltaisemman matematiikkakuvan ja ymmärtämisen edistämiseksi. Jahnke (2000, s. 299) esittääkin, että alkuperäisten lähteiden tutkimisen tulisi olla pakollista opettajakoulutuksessa, jotta opettajilla olisi edellytyksiä sisällyttää historiaa opetukseensa ja vahvistaa omaa ymmärrystään matematiikan luonteesta ja muuttumisesta pitkin historian. Samoin matematiikan historia voisi tarjota opettajalle resursseja didaktisten ulottuvuuksien kehittämiseen Shulmanin pedagogisen sisältötiedon mielessä (Shulman, 1987, s. 8; Jankvist, 2009a, s. 242).

Matematiikan aineenopettajakoulutusta tarjoavissa suomalaisyliopistoissa onkin ollut tavallisesti ainakin jonkinlainen mahdollisuus myös matematiikan historian valinnaiseen opiskeluun. Sekä Helsingin että Oulun yliopistoissa matematiikan historiasta on järjestetty säännöllisesti syventäviin opintoihin kuuluvia valinnaisia luentokursseja (dosentti Matti Lehtisen luentomateriaaleja on luettavissa verkosta, ks. lähdeluettelon kohta ”Muu aineisto”). Myös Jyväskylän yliopistossa syventäviin opintoihin kuuluvaa valinnaista matematiikan historian kurssia on perinteisesti luennoitu noin kahden vuoden välein, ja vastaava kurssi kuuluu myös Itä-Suomen yliopiston kurssivalikoimaan. Tampereen teknillisessä yliopistossa kurssia on järjestetty kirjatenttinä ja Turun yliopistossa ainakin viime vuosina aineopintoihin liittyvänä suppeampana kirjatenttinä.

Vaikka matematiikan historian kursseja tarjotaan ja suositellaan usein juuri aineenopettajaksi aikoville, olisi kiinnostavaa tietää, kuinka suuri osa aineenopettajaksi opiskelevista ja toisaalta opettajiksi päätyvistä on todella kyseisen kurssin suorittanut, sekä toisaalta, mitä mieltä he kurssin annista ovat olleet pian heti kurssin suoritettuaan ja toisaalta opettajana toimiessaan. Kuten luvun 3 kappaleessa 3.2. käsiteltävässä opettajille tehdyssä kyselytutkimuksessa ilmenee, ainakaan kaikille opettajille vastaavasta kurssista ei ole lopulta kuitenkaan tarttunut mukaan juuri mitään käyttökelpoista matematiikan opetuksen suunnittelua ajatellen. Tämän tarkempaan tutkimiseen ei tämän tutkielman puitteissa ole kuitenkaan mahdollisuutta syventyä.

Mutta kenties merkittävin syy opettajien suhteellisen vaatimattomalle matematiikan historian painottamiselle selittyy opetussuunnitelmien painotuksilla. Viimeisimmissä opetussuunnitelman perusteissa matematiikan historiaa ei juuri korosteta. Valtakunnallisissa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa matematiikan historia on toki mainittu vuosiluokkien 6-9 kohdalla omana keskeisenä ajattelun taitojen ja menetelmien sisältönään (POPS, 2004, s. 164), mutta listassa mainintaa lukuun ottamatta siihen ei muuten kiinnitetä siinäkään huomiota. Lukion opetussuunnitelman perusteissa matematiikan historiaa ei suoraan edes mainita, vaikka esimerkiksi matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteisiin sisältyykin että opiskelija ”tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä” (LOPS, 2003, s. 125), jonka toteutumiseksi jonkinlaisen historiallisen näkökulman tarjoaminen on liki välttämätöntä. Huomattavaa on, että pitkän oppimäärän kohdalla edes matematiikan kulttuurikehitystä ei mainita. Vertailun vuoksi mainittakoon Tanskan lukio-opetusta koskenut uudistus vuonna 2006, jolloin lukion opetussuunnitelman tavoitteisiin kirjattiin muun muassa opiskelijoiden kyky ymmärtää ja esittää matematiikan kehitystä ja sen yhteyksiä historialliseen, tieteelliseen ja kulttuurilliseen kehitykseen, ja jonka vuoksi lukion matematiikan syventävien sisältöjen (enimmillään kolmasosa kaikesta sisällöstä) opetukseen on sisällytettävä muun lisäksi myös moduuleita matematiikan historiasta (Jankvist, 2009b, s. 6).

Keskeisenä haasteena matematiikan historian opettamisen mahdollistamiseksi koulussa onkin siis juuri opettajien valmiuksien puute: opettajat eivät juurikaan tai lainkaan opiskele matematiikan historiaa saati matematiikan historian sisällyttämistä opetukseen opintojensa aikana ja koska valmiiksi opettajille suunnattuja opetusmateriaaleja historian sisällyttämiseksi opetukseen on tarjolla niukasti, moni opettaja ei joko tiedä historian käyttöön liittyvistä positiivisista puolista tai osaa tuoda historiaa opetukseensa luontevaksi koetulla tavalla. Asiantuntemuksen puutteen kokemus voi saada pikemminkin vierastamaan aihetta kuin herättää kiinnostusta. Mikäli matematiikan historia vielä koetaan ”varsinaisiin” matematiikan sisältöihin nähden ylimääräisenä sisältönä, opetussuunnitelmien sivuuttaessa aiheen täysin tai lähes kokonaan, yhdistettynä opettamisen haasteiden ikuisuuskysymykseen, aikapulaan, matematiikan historialle on varattu paikka sivuutettavien aiheiden joukossa. (Fauvel, 1991, s. 4; Clark, 2011, s. 2). Näitä haasteita tarkastellaan empiirisestä näkökulmasta seuraavassa luvussa.

3. Katsaus käytäntöön

Tässä luvussa tarkastellaan muutamien osviittaa antavien tutkimusten sekä konkreettisen vertailun kautta matematiikan historiaa käytännössä: opettajien, oppilaiden ja opiskelijoiden, sekä oppikirjojen näkökulmasta.

Vaikka matematiikan käytön erilaisista hyödyistä opetukselle onkin kirjoitettu verrattain paljon viime vuosikymmenten aikana, empiiristä tutkimusta aiheesta on vähänlaisesti; puute, jonka esimerkiksi Jankvist toteaa (Jankvist, 2010). Aiheita empiiriselle tutkimukselle onkin valtavasti, aina runsaudenpulaan asti. Tutkimusta kaivattaisiin sekä opettamiseen että oppimiseen, aivan kuten myös oppimateriaaleihin liittyen. Myös asenteiden tutkimukseen olisi syytä kiinnittää huomiota, oli kyse sitten opettajista tai oppilaista, sillä ovathan matematiikan historian opetuksessa käyttämistä puoltavat keskeiset edut ja perustelut, samoin kuin uusien elementtien tuominen opetukseen kytköksissä juuri asenteisiin. Erityisesti siihen liittyen, miksi, milloin ja millä tavoin historia opetukseen sisällytetään, ovat opettajien asenteet avainasemassa. Ja edelleen asenteet ovat kytköksissä uskomuksiin.

Tätä puutetta korjaamaan on nyttemmin pyritty maailmalla tekemään pilotti- yms. pienoistutkimuksia, joilla aihetta koskevan teorian tueksi ja jatkotutkimuksen suuntaviivoja antamaan saataisiin jotakin konkreettista. Seuraavaksi esittelen yhden tutkimuksen, erään vuonna 2011 järjestetyn kansainvälisen matematiikan opetuksen tutkimukseen keskittyneen konferenssin (The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 7) matematiikan historiaa käsitelleen työryhmän tuotoksista (3.1). Tämän jälkeen esittelen myös oman pienimuotoisen vuoden 2012 aluksi toteutetun kyselytutkimuksen ja käyn läpi siinä esille nousseita seikkoja ja johtopäätöksiä (3.2).

3.1. Kathleen M. Clarkin pienoistutkimus opettajien kokemuksista matematiikan historian käyttämisestä opetuksessa

Eräs empiirisen tutkimusaineiston puutteen vastaamiseen pyrkineistä tutkimuksista on Kathleen M. Clarkin pienoistutkimus (Clark, 2011), jossa tarkasteltiin kuuden yhdysvaltalaisen ”yläkoulun” sekä toisen ja kolmannen asteen matematiikan opettajan lukuvuoden 2008–2009 aikana tapahtunutta matematiikan historian sisällyttämistä opetukseen. Tutkimukseen valikoitui joukko vapaaehtoisia opettajia, aihetta käsitelleen kurssin päätteeksi. Clarkin tutkimuksen tarkoituksena oli kartoittaa millä tavoin opettajat historiaa opetuksessaan käyttivät, sekä miten nämä kokivat tässä onnistuneensa, eli kuinka opetukselliset tavoitteet tutkimukseen osallistuneiden opettajien näkökulmasta näissä tapauksissa toteutuivat. On huomattava, että tähän tutkimukseen valikoituneet opettajat olivat jo valintaperusteen vuoksi ehkäpä tavanomaista matematiikan opettajaa kiinnostuneempia ja valistuneempia matematiikan historian opetukseen sisällyttämiseen, mutta kuten Clark huomauttaa, on tämä luonteva tutkimuksen lähtökohta, jotta tutkimuksessa voitaisiin tarkastella historian sisällyttämistä opetukseen: moni opettajahan saattaisi jättää tämän todella tekemättä. Jokainen kuudesta tutkimukseen osallistuneesta opettajasta kertoikin kyseessä olleen kurssin yhteydessä, ennen tutkimuksen alkua, aikovansa tuoda opetukseensa entistä enemmän historiallisia elementtejä, tai pyrkivänsä kehittymään tällä saralla jatkossa yhä enemmän (Clark, 2011, s. 3-4). Toinen tutkimuksen luonnetta merkittävästi määrittelevä piirre syntyi siitä, että *opettajat itse* raportoivat (noin kuuden viikon välein) tekemisistään[4] ja kokemuksistaan[5], joten vaikka painopiste tutkimuksessa onkin itse opetuksella ja oppimisella, on tutkimuksessa keskeistä myös opettajien näkökulman, oman kokemuksensa kartoitus.

Tutkimuksessa opettajat raportoivat yhteensä 32 matematiikan historiaa hyödyntävää opetustapahtumaa, jotka luokiteltiin sisällöltään joko anekdoottiseen (kahdessakymmenessä tapauksessa), henkilöhistorialliseen (yhdeksässä tapauksessa) tai kiinnostavaa matematiikan ongelmaa käsittelevään (viidessätoista tapauksessa) sisältöön. Näiden lisäksi opettajien tuli kertoa mitä opetuksellisia tavoitteita he historian tuomiselle opetukseen asettivat (pohjautuen Jankvistin luokitteluun historiasta välineenä tai päämääränä, ks. luku 2). Clarkin näkemyksen mukaan jokainen vastaus tavoitteista kuvasi nimenomaan historian käyttöä välineenä, vaikka opettajien kuvaukset opetukseen sisällytettävästä historiallisesta sisällöstä ja kommentit tavoitteiden toteutumisesta Clarkin mukaan viittaavatkin epäsuorasti myös historian käyttöön itsensä vuoksi (Clark, 2011, s. 6).

[4] Clarkin tutkimuksen ensimmäinen tutkimuskysymys: *mitä historiallista sisältöä opetukseen liittyi: historiallisia anekdootteja, henkilöhistoriaa vaiko matematiikan ongelmien historiaa?*
[5] Clarkin tutkimuksen toinen (*minkälaisia ongelmia historian sisällyttämiseen liittyen opettajat havainnoivat joko opettajan tai oppilaan näkökulmasta?*) ja kolmas tutkimuskysymys (*mitä etuja he siitä havaitsivat olevan, joko opettajan tai oppilaan näkökulmasta?*)

Varsin odotetusti lukumääräisesti suurimman suosion sai anekdoottien käyttäminen opetuksen tukena, muun muassa uusiin teemoihin perehdyttäessä. Tämän Clark toteaakin mainioksi tavaksi inhimillistää matematiikkaa, sillä historiallisista sisällöistä anekdootit vievät verrattain vähän aikaa ja resursseja muulta opetukselta. Kuitenkin Clark nostaa lisäksi keskeiseksi positiiviseksi seikaksi matemaattisten ongelmien suhteellisen suuren suosion opettajien raportoiduissa tavoissa historian tuomiseksi opetukseen, sillä juuri erilaisten, aitojen matemaattisten ongelmien käsittelyn myötä historiallinen sisältö paitsi kytkeytyy matemaattiseen sisältöön, myös tarjoaa oppilaille mahdollisuuden tutkia erilaisia ratkaisumenetelmiä (Clark, 2011, s. 6). Näin historia kiinnostavina matemaattisina ongelmina palvelisi monipuolisesti paitsi historian mahdollisuutta laajentaa käsityksiä matematiikasta, myös sen hyötyä matemaattisten taitojen kehittämiseksi.

Kuitenkin tutkimus osoitti myös sen, etteivät edes melko rajatusti valikoituneet, matematiikan historiaan opetuksessa suhtautuneet opettajat onnistuneet tavoitteissaan ottaa myös historiallinen näkökulma opetukseensa. Keskeisimmän sisällön, historiallisten matemaattisten ongelmien tapauksessa, jo kyseisten kuuden opettajan joukossa syntyi kahtiajako niiden, jotka sisällyttivät historiallisia elementtejä opetukseensa koko lukuvuoden ajan, sekä niiden, jotka joko luopuivat suunnitelmistaan historiallisten elementtien ottamiseksi opetukseen kokonaan jossakin vaiheessa lukuvuotta tai eivät tehneet sitä lainkaan (kaksi opettajista). Valtaosa raportoiduista historiallisia ongelmia käsitelleistä tapauksista toteutui lopulta kahden opettajan opetuksessa (joista toinen raportoi kahdeksan tapausta, toinen neljä tapausta).

Vaikeuksia joiden vuoksi opettajien suunnitelmat osin tai kokonaan kariutuivat, olivat joissakin tapauksissa lukuvuoden lopulla häämöttävät päättökokeet ja -arviointi, ja muutamissa tapauksissa (Clarkin oman tulkinnan mukaan) oppilaiden varhainen taso. Sen sijaan eniten historiaa opetukseensa sisällyttänyt opettaja nosti kyllä esiin mittavien opetussisältöjen sekä täyden lukujärjestyksen ja aikarajoitteiden mukanaan tuomat ongelmat, niin opetukselle kuin opiskelijoiden mahdollisuudelle työstää ongelmia, mutta tästä huolimatta jatkoi historiallisten elementtien mukana kuljettamista läpi lukuvuoden. (Clark, 2011, s. 8)

3.2. Kysely suomalaisten matematiikan opettajien suhtautumisesta matematiikan historiaa kohtaan opetuksessa

Toteutin tammi-helmikuussa 2012, osana opettajan pedagogisia opintojani, pienimuotoisen kyselyn, tarkoituksenani saada jonkinlaista hahmoa suomalaisopettajien suhtautumisesta matematiikan historiaan matematiikan opetuksessa, katsaukseksi opettajien näkökulmaan. Pyrkimyksenäni on tätä kautta tarkastella, kuinka kansainvälisen alan tutkimuksen ja teorioiden esille nostamat seikat heijastuvat suomalaisten opettajien suhtautumisessa.

Kyselyyn osallistui opettajia kolmesta eri koulusta (kaksi pääkaupunkiseudun koulua sekä yksi kaakkoissuomalainen koulu), joukossa sekä yläkoulun, lukion että molempien näiden asteiden opettajia.

3.2.1. Kysely ja tutkimuskysymys

Kyselyyn valikoitui kolme koulua, joiden ajattelin olevan keskenään tarpeeksi erilaisia, jotta kysely voisi jollakin tasolla kuvastaa opettajakunnan kirjoa. Kustakin koulusta olin yhteydessä yhteen matematiikan opettajaan joka toimitti kyselylomakkeen kollegoilleen, joista halukkaat opettajat, suhteellisen tasaisesti kustakin koulusta, vastasivat. Koska tutkimukseen osallistuneet opettajat eivät olleet satunnaisesti valikoituneet, ja tämä oli tiedossa jo kyselyä laadittaessa, tarkoituksena ei ollut tehdä kvantitatiivista tutkimusta, vaan tutkimuksen pyrkimyksenä oli ennemminkin tehdä katsaus siihen, minkälaista suhtautumista aiheeseen suomalaisopettajilla esiintyy. Kyselyn voisikin ajatella eräänlaisena ”ikkunana” opettajien näkökulmaan: jos ei nyt kattavana niin ainakin kuvastelevana katsauksena.

Tutkimuskysymykseksi muotoutui: *Miten opettajat suhtautuvat matematiikan historian sisällyttämiseen matematiikan opetukseen?*

Liitteenä (liite 1) on kyselylomake, jolla kysely suoritettiin. Kyselylomake koostui yhteensä yhdestätoista kysymyksestä, kahden taustoittavan kysymyksen (kysymykset 1, 2) ja yhden avoimen kysymyksen (kysymys 11) lisäksi kahdeksasta kolmen eri tyypin kysymyksestä: opettajan omia arvostuksia kartoittavista (kysymykset 3, 9), opettajan oppilaita ja näiden oppimista koskevia näkemyksiä (kysymykset 6, 7) sekä opetusta koskevista kysymyksistä (kysymykset 4, 5, 8, 10). Taustoittavaa ja avoimia kysymyksiä lukuun ottamatta kysymykset olivat pääasiassa monivalintakysymyksiä, jossa epäinformatiivisten ”ei mitään mieltä” -tyyppisten vastausten välttämiseksi asteikkoa ei asetettu viisiportaiseksi, vaan neliportaiseksi, jolloin vastaaja joutui ottamaan kantaa jompaankumpaan suuntaan, joko lievemmin taikka vahvemmin. Seuraavassa käyn läpi perusteluja kunkin kysymyksen mukanaololle, sekä ajatuksia oletetuista kysymysten välisistä kiinnostavista yhteyksistä.

1. *”Opetuskokemus”*: Taustoittaviin kysymyksiin sisällytettiin kysymys opettajan opetuskokemuksesta, sillä kuten Clarkin tutkimuksessakin (Clark, 2011) kävi ilmi, voi into sisällyttää historiaa opetukseen olla suurempi, kuin realiteettien tarjoamat mahdollisuudet siihen. Näin ollen on kiinnostavaa kuinka paljon opetuskokemus vaikuttaa opettajien suhtautumiseen matematiikan historian sisällyttämiseksi opetukseen, ja etenkin koettuihin esteisiin sen toteuttamiseksi (kysymys 10).

2. ”*Olen opettanut matematiikkaa…*”: Edelleen toisena taustoittavana kysymyksenä kysyttiin minkä asteen (perusaste, lukion lyhyt tai pitkä oppimäärä) opetusta opettajien opetuskokemukseen kuuluu, sillä oppilaiden ja opiskelijoiden tasosta riippuen historian merkitys voidaan kokea eri tavoin, samoin kuin on myös opettajan kokeman historiallisten sisältöjen sopivuudenkin laita.

3. *”Koen matematiikan historian tärkeänä osana matematiikan opetusta”:* Opettajan arvostus matematiikan historiaa kohtaan matematiikan opetuksessa.

4. *”Koen että minulla on hyvät valmiudet sisällyttää historiallinen näkökulma matematiikan opetukseen”*: Opettajan omien opetusvalmiuksien arviointi.

5. *”Pyrin tuomaan matematiikan historiaa esille omassa opetuksessani”:* Opettajan oman opetuksensa painotus matematiikan historian osalta.

6. *”Mielestäni oppilaat suhtautuvat matematiikan historiaan…”:* Opettajan näkemys oppilaiden suhtautumisesta matematiikan historiaan. Yhteys edellisen kysymyksen kanssa on kiinnostava: kuinka paljon koettu oppilaiden suhtautuminen vaikuttaa teeman sisällyttämiseen opetukseen.

7. *”Mielestäni matematiikan historia voisi innostaa oppilaita matematiikan opiskelussa”*: Opettajan näkemys matematiikan historian opetuksen mahdollisuuksista. On kiinnostavaa, kuinka tämä kytkeytyy edelliseen kysymykseen. Myös kysymyksen 11 yhteydessä esitetyt vapaamuotoiset ajatukset matematiikan historian opetuksen parhaasta mahdollisesta tilanteesta voivat toimia selittäjänä, mikäli aiheen merkitys ja mahdollisuudet sen hyödyntämiseen eivät opettajan näkökulmasta kohtaa.

8. *”Käsittelisin matematiikan historiaa mieluiten…”:* Opettajan keinovalikoimasta matematiikan historian opetuksessa. Erityisen kiinnostavia ja arvokkaita jatkotarkastelun kannalta ovat opettajien itsensä esille tuomat esimerkit.

9. *”Matematiikan historiaa tulisi käsitellä selvästi enemmän kouluopetuksessa”*: Opettajan kokemus nykytilanteen riittämättömyydestä matematiikan historian opetuksen toteutumisessa. Kiinnostavaa myös vastauksen suhtautuminen kysymyksessä 5 tarkasteltuun oman opetuksen toteuttamisen pyrkimykseen. Samoin kysymys heijastelee opettajan preferenssiä, ja yhdistettynä kysymykseen 3 näin ollen kuvaa opettajan näkemystä matematiikan historian tärkeydestä matematiikan opetuksessa.

10. *”Matematiikan historian opettamisen ensisijaisena rajoitteena näen…”*: Opettajan kokemus matematiikan historian opetusta rajoittavista tekijöistä: syitä historiallisen näkökulman vähäisyydelle. Yhteydessä edelliseen kysymykseen.

11. *”Kuvaile vapain sanoin suhdettasi matematiikan historian opetukseen joko omassa opetuksessasi tai omilta kouluajoiltasi. Minkä näkisit optimitilanteena matematiikan historian opettamisen kannalta?”:* Vapaamuotoisen vastauksen kautta opettajalla on mahdollisuus tarkentaa esittämiään vastauksiaan tai lisätä jokin omasta mielestään olennainen näkökohta tai kokemus matematiikan historiaan liittyen.

3.2.2. Aineisto

Kyselyyn vastasi yhteensä 11 opettajaa, suhteellisen tasaisesti kustakin kolmesta koulusta joihin kysely kohdistettiin: kahdesta koulusta kummastakin vastanneita opettajia oli kolme, kolmannen koulun opettajista viisi. Kyselyyn osallistuneiden opettajien opetuskokemus osoittautui hyvin erimittaiseksi, vaihdellen välillä 3,5–30 vuotta (keskiarvo noin 12,3 vuotta). Yhdestätoista opettajasta yksi on opettanut matematiikkaa vain lukiossa (pitkä oppimäärä) ja lopuista kymmenestä jokainen on opettanut matematiikkaa perusasteella, näistä kuusi myös lukiossa, sekä pitkää että lyhyttä oppimäärää. Ohessa ovat vastaukset tiiviisti taulukoituina, lukuun ottamatta pidempiä ja vapaamuotoisempia vastauksia. Täydelliset vastaukset löytyvät taulukoituina liitteestä 2.

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11
1. Opetuskokemus (vuotta)	10	28	30	28	4	5	4,5	10	3,5	6	6,5
2. Luokka-aste	lp	pk	pk, lp, ll	pk, lp, ll	pk	pk	pk	pk	pk, lp	pk, lp, ll	pl, lp, ll
3. Koen mat. hist. tärkeänä osana…	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4. Koen että minulla on hyvät valmiudet…	2	2	4	2	2	2	3	3	3	2	2
5. Pyrin tuomaan matematiikkaa…	1	3	3	3	3	2	2	3	3	2	3
6. Mielestäni oppilaat suhtautuvat…	3	-	3	3	3	3	3	3	3	3	4
7. Mielestäni mat. hist. voisi innostaa oppilaita…	2	2	3	2,5	3	3	3	3	3	3	4
8. Käsittelisin mat. hist. mieluiten… (+= lisätty esimerkki)	+	hh, o	hh, o +	hh, o	hh, o	hh	hh	hh, o	o+	o+	hh, o+
9. Mat. hist. tulisi käsitellä selvästi enemmän…	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3
10. Mat. hist. opettamisen ensisijaisensa rajoitteena…	v	a, m, k	a, m	a, v	a, m +	v, a	a	m, v	a	a, v	v
11. Avoin kysymys (+ = vastattu)	+	+	+	+		+	+		+	+	+

Taulukko 1. Opettajien vastaukset

Selityksiä: pk= peruskoulu, lp= lukio (pitkä), ll= lukio (lyhyt), hh= henkilöhistorioiden kautta, o= matematiikan ongelmien historian kautta, a= ajan puute, m= opetusmateriaalin puute, k= koulutuksen puute, v= opettajan valmiuksien puute, +=sanallinen lisäys

3.2.3. Analysointi

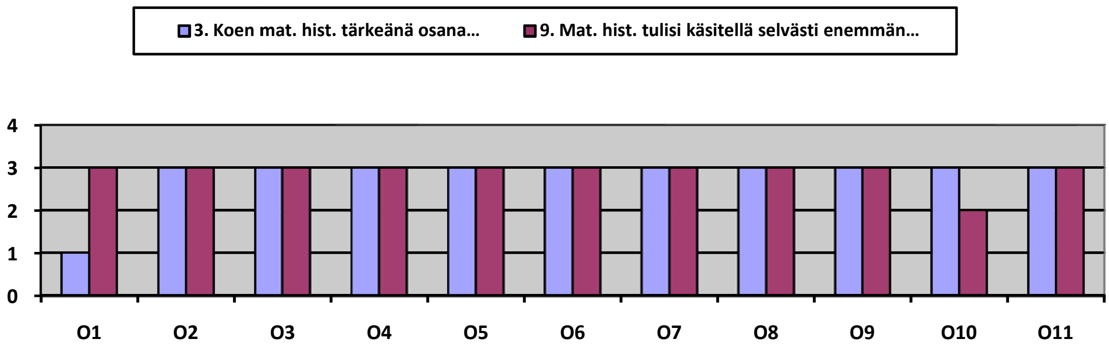
Vastausten analysointia varten tutkimuskysymys jaettiin neljään eri kysymykseen:

i. Suhtautuvatko opettajat myönteisesti vai kielteisesti matematiikan historiaan matematiikan opetuksessa?
ii. Kokevatko opettajat että matematiikan historia voisi innostaa oppilaita matematiikan opiskelussa
iii. Millä tavoin opettajat mieluiten historiaa sisällyttäisivät opetukseensa?
iv. Mitä esteitä opettajat näkevät historian sisällyttämisellä matematiikan opetukseen?

Vastaus varsinaiseen tutkimuskysymykseen muodostettiin näiden kysymysten erillisen tarkastelun ja yhteenvedon kautta. Seuraavassa analysoidaan kutakin osakysymystä erikseen.

i. Suhtautuvatko opettajat myönteisesti vai kielteisesti matematiikan historiaan matematiikan opetuksessa?

Tähän haettiin vastausta kysymyksillä 3 (”Koen matematiikan historian tärkeänä osana…”) ja 9 (”Matematiikan historiaa tulisi käsitellä selvästi enemmän kouluopetuksessa”), ja myös muita kysymyksiä kiinnostavissa kohdin soveltaen. Molempiin kysymyksiin 3 ja 9 vastattiin erittäin yhdenmukaisesti. Ainoastaan yksi kyselyyn vastanneista opettajista oli täysin eri mieltä väitteen ”Koen matematiikan historian tärkeänä osana matematiikan opetusta” (kysymys 3) kanssa, loput kymmenen olivat valinneet kohdan ”jokseenkin samaa mieltä”. Samoin yhtä lukuun ottamatta kaikki opettajat vastasivat olevansa ”jokseenkin samaa mieltä” väitteen ”Matematiikan historiaa tulisi käsitellä selvästi enemmän kouluopetuksessa” (kysymys 9) kanssa; yksi opettajista



Kaavio 1. Vastaukset kysymyksiin 3 ja 9
(1=täysin eri mieltä, 2=jokseenkin eri mieltä, 3= jokseenkin samaa mieltä)

oli lievästi varauksellinen väitteen suhteen, vastaten ”jokseenkin eri mieltä”.

Mielenkiintoista on, että yksittäiset poikkeukset ”linjasta” olivat eri opettajien vastauksissa. Matematiikan historian tärkeyden osana matematiikan opetusta kyseenalaisti vastaajajoukon ainoa pelkän lukion pitkän oppimäärän opettaja (Opettaja 1), missä taas lievästi varaukselliselle kannalle historian lisäämisessä suhtautui opettaja (Opettaja 10), joka ilmoitti opettaneensa matematiikkaa sekä perus- että lukioasteella (sekä lyhyt että pitkä). Näihin varauksellisiin poikkeamiin muutoin niin yhdenmukaisesta myönteisen suhtautumisen linjasta näkökulmaa haettiin opettajien vastauksilla kysymyksiin muun muassa 10 ja 11, koetuista rajoitteista historian sisällyttämiselle, sekä vapaamuotoisista kommenteista yleensä historian opetukseen liittyen.

Opettaja numero 1 mainitsi ensisijaiseksi rajoitteeksi historian sisällyttämiseksi opetukseen (kysymys 10) opettajan valmiuksien puutteen, ja lisäsi tähän jatkoksi: ”*ei siis tiedä historiasta itsekään*”. Samainen opettaja oli myös vastannut vapaan kommentin kysymykseen: *”Kiinnostavat tarinat historiaan liittyen voisivat tuoda piristystä arkeen. Asiaan pitäisi olla opellakin aikaa perehtyä.”* (Opettaja 1, kysymys 11). Kyseisen opettajan suhtautuminen historiaan paljastui tämän kautta sittenkin varovaisen positiiviseksi. Hän kertoi myös olevansa ”jokseenkin eri mieltä” valmiuksistaan sisällyttää historiaa opetukseensa (kysymys 4) ja itse sisällyttävänsä historiaa opetukseensa ”erittäin vähän” (kysymys 5). Näin opettajan 1 erimielisyys historian tärkeydestä matematiikan opetuksessa selittynee opettajan omalla kokemuksella sisällyttää sitä opetukseensa. On kiinnostava kysymys, kuinka paljon lukion (etenkin pitkän oppimäärän) laajojen sisältöjen opettamisen ja aikarajoitteiden yhdistelmän luoma paine myös johtaa ”ylimääräisiksi” (ja viihteellisiksikin) koettujen sisältöjen (kuten historian) poissulkemiseen opetuksesta (vrt. Clark 2011, 8), mutta tämän kyselyn puitteissa tähän kysymykseen ei ollut mahdollista vastata.

Vastaavasti opettajan 10 lievä erimielisyys historian lisäämisestä opetukseen löysi erään selityksenä kysymyksistä 4, 5, 10 ja 11. Tämä nimittäin kertoi olevansa ”jokseenkin eri mieltä” valmiuksistaan historian sisällyttämiseksi opetukseensa (kysymys 4) ja pyrkivänsä tuomaan sitä opetukseensa ”niukasti” (kysymys 5). Ensisijaisiksi rajoitteiksi tälle hän mainitsi paitsi ”ajan puutteen” myös ”opettajien valmiuksien puutteen” (kysymys 10) ja kirjoitti viimeisessä, vapaamuotoisessa vastauksessaan että

”*En kauhean paljon painota matematiikan historian opettamista. Sopivissa tilanteissa voi kertoa jotain, tai esimerkiksi johdatella aiheeseen historian avulla. Voi motivoida ja lisätä kiinnostusta toisilla. [...] Olen kyllä yliopistolla opiskellut matematiikan historian kurssin, mutta moni asia on unohtunut. Myös peruskoulumatematiikkaan moni asia on aivan liian vaikea syvällisempää tarkastelua varten.*” (opettaja 10, kysymys 11)

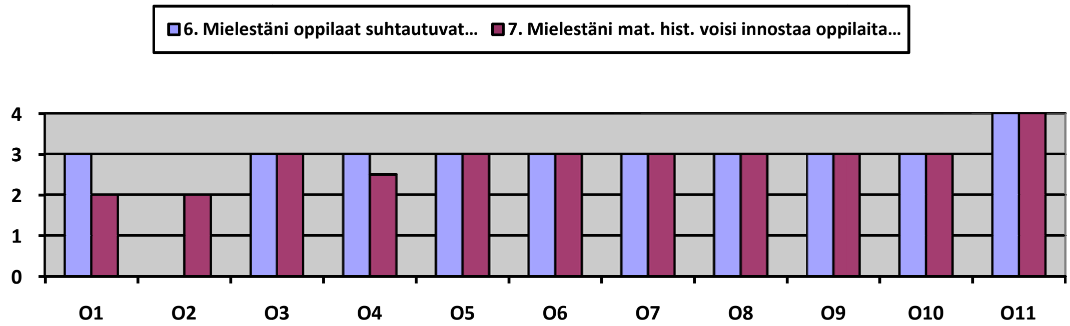
Koetut aika- ja valmiusrajoitteet varmasti saavat aikaan varauksellisuutta historian lisäämiseksi opetukseen, mutta kuten yllä olevasta huomataan, myös opettaja 10 toteaa matematiikan historian motivaatiota ja kiinnostusta lisäävän merkityksen. On myös huomattava opettajan maininta historian käsittelemisen vaikeudesta peruskoulumatematiikan puitteissa (vrt. Clark, 2011, s. 8).

Yhteenvetona voidaan todeta opettajilla olevan suhteellisen, jokseenkin varovaisen positiivinen suhtautuminen matematiikan historiaan osana opetusta, vaikka koetut rajoitteet (omasta ja yleisesti) mahdollisuuksista sisällyttää historiaa opetukseen varjostavatkin todellisuutta (vrt. 2.4.3.).

”*Matematiikan historialla on omassa opetuksessani mielestäni liian pieni rooli. Omat taustatiedot matematiikan historiasta ovat varsin niukat, joten historianäkökulma jää usein vähäiseksi. Optimitilanteessa opettajalla on historiasta laaja näkemys ja hän sisällyttää sitä opetukseensa. Näkökulma voi mielestäni olla myös esim. matematiikka fysiikan apuvälineenä, jolloin teema laajenee oppiaineiden väliseen integraatioon; opetuksesta tulee mielekkäämpää jos oppiaine sidotaan johonkin ja aine saa lisää merkityksiä.*” (Opettaja 9, kysymys 11)

ii. Kokevatko opettajat että matematiikan historia voisi innostaa oppilaita matematiikan opiskelussa?

Opettajien näkemys oppilaiden vastaanottavaisuudesta ja hyötymisestä matematiikan historialle näyttäytyy sekin hyvin yhdenmukaisena tämän kyselyn (kysymysten 6, 7 ja 11) perusteella. Vastaajista yhdeksän opettajaa mainitsi mielestään oppilaiden suhtautuvan matematiikan historiaan ”suhteellisen positiivisesti” ja yksi opettaja (numero 11) ”erittäin positiivisesti” (kysymys 6). Yksi opettajista jätti (mahdollisesti vahingossa) vastaamatta tähän kysymykseen. Pientä hajontaa paljastui kuitenkin kysymyksen 7 vastauksissa: vaikka valtaosa (seitsemän vastaajaa) opettajista edelleen kertoi olevansa jokseenkin samaa mieltä, ja yksi opettajista (numero 11) täysin samaa mieltä väitteen ”Mielestäni matematiikan historia voisi innostaa oppilaita matematiikan opiskelussa” kanssa, kaksi opettajista suhtautui tähän varauksella (”jokseenkin eri mieltä”) ja yksi ei osannut sanoa kantaansa (ympyröity tyhjä tila keskeltä).



Kaavio 2. Vastaukset kysymyksiin 6 (3= suhteellisen positiivisesti, 4= erittäin positiivisesti) ja 7 (2=jokseenkin eri mieltä, 3= jokseenkin samaa mieltä, 4= täysin samaa mieltä)

Varaukselliset näkemykset kuitenkin tässäkin tapauksessa selittynevät ainakin osittain opettajien omalla vieraudelle aiheen suhteen: vaikka he siis myöntävät historian innostavan luonteen, he kokemuksen puutteessa epäröivät esittää positiivista näkemystä historian eduista oppimismotivaatiolle. Toinen varauksellisista opettajista nimittäin on jo edellä mainittu opettaja 1, joka koki omat valmiutensa historian opettamiseksi vähäisiksi, ja mainitsi tuovansa sitä siksi opetukseensa erittäin vähän, toinen taas jo 28 vuotta opettanut opettaja (Opettaja 2), joka toteaa lisäksi että:

> ”*Matematiikan historian kurssi jäi aikoinaan käymättä, joten historia ei sillä lailla ole hallinnassa. Yksittäiset henkilöhistoriat eivät tässä paljon auta. Mikäli halutaan, että opettajilla on näkemys myös historiasta, pitäisi matematiikan historia sisällyttää pakollisiin opintoihin.*” (Opettaja 2, kysymys 11)

Jos opettajan oma kokemus aiheen parista on vähäistä ja välteltyä, voi se hyvinkin vaikuttaa näkemyksiin siitä, minkälaisia etuja siitä voisi opetukselle olla. Tässäkin tapauksessa siis juuri omakohtainen kokemus värittänee opettajan laajempaa näkemystä aiheesta. Huomattavaa on myös kuinka juuri varauksellisesti suhtautuneiden opettajien vapaamuotoiset kommentit liikkuvat usein hyvin yleisellä tasolla (kuvastaen juuri aiheeseen tarttumisen vaikeutta), kun taas esimerkiksi erittäin myönteisessä valossa oppilaiden kokemuksen matematiikan historiasta esittänyt opettaja muotoili näkemyksensä optimaalisesta matematiikan historian käytöstä huomattavasti muita perusteellisemmin ja perustellummin:

> ”*Omassa opetuksessani käytän niukasti matematiikan historiaa, vaikka haluaisin käyttää enemmänkin. Omat valmiudet ja ennen kaikkea tietomäärä aiheesta tuntuu moneen asiaan liian rajalliselta. Oppikirjoissa saattaa paikoin olla lyhyitä mainintoja johonkin teoriaa liittyvistä historiallisista seikoista ja näkökulmista ja näitä mielelläni käytän ja oman tietämykseni pohjalta laajennan, mutta valitettavan harvoin omat tiedot riittävät luontevaan laajentamiseen ja kysely- tai keskustelumuotoiseen lähestymiseen. Optimaalisessa tilanteessa historialliset esimerkit sitovat teoriaa käytäntöön, tarjoavat oppilaille kiinnekohtia, lisäävät sitä kautta motivaatiota ja tuovat havainnollisella tavalla esille matematiikan merkityksen ja hyödyllisyyden.*”
> (Opettaja 11, kysymys 11)

Yhteenvetona: opettajat mieltävät kyllä matematiikan historian oppilaille mieluisaksi aiheeksi, ehkäpä pääasiassa sen tavallisuudesta poikkeavan luonteen vuoksi, mutta sen vaikutuksiin opiskelumotivaatiolle suhtaudutaan hieman varauksellisemmin (joskin pääasiallisesti positiivisesti). Tämä selittynee ainakin osittain taas opettajien omilla vierauden kokemuksilla aiheen parissa.

iii. Millä tavoin opettajat mieluiten historiaa sisällyttäisivät opetukseensa?

Opettajat mainitsevat yhtä usein mieluisimmaksi historian käsittelytavaksi opetuksessa henkilöhistoriat kuin matematiikan ongelmien historian: yhtä vastaajaa lukuun ottamatta jokaisessa lomakkeessa oli valittu jompikumpi, kumpaakin kahdeksan kertaa; kuudessa tapauksessa vastaaja mainitsi molemmat. Yllättävää oli anekdoottien puuttuminen valinnoista tyystin. Tämä tosin selittynee sillä, että usein tapa käsitellä henkilöhistorioita tapahtuu juuri anekdoottien kautta, eikä erillistä historiallisten anekdoottien tapaa välttämättä eritellä tai hahmoteta.

Kaavio 3. Opettajien mieluisin tapa sisällyttää matematiikan historiaa opetukseen

Opettajan 1 vastaus, tarinoiden kautta käsittely, viitannee sekin samaan anekdoottien ja henkilöhistorioiden yhteisen piirteen – tarinallisuuden – aikaansaamaan rajojen hämärtymiseen. Kuten myös Clark omassa tutkimuksessaan toteaa, historiallisten matemaattisten ongelmien runsas maininta on huomionarvoista (Clark, 2011, s. 6). Siinä, kuinka paljon ja minkälaisia esimerkkejä historian tuomisesta opetukseen opettajat esittelivät, ilmeni selkeitä eroja. Eräs opettajista pohti matematiikan historian käytön näkökulmia

> *”-uudet käsitteet <-> ”miten tähän on tultu”*
>
> *- henkilöiden yhteydessä <-> ”mitä muuta on tehty”*
>
> *- matematiikka on lähes aina tullut tarpeeseen → vastaa kysymykseen: ”Mihin tätä tarvitaan””*
>
> (Opettaja 4, kysymys 11).

Toiset taas esittelivät konkreettisia ongelmia, kuten ”*neliöjuuren määrittämistä, Pythagoraan lause, Gaussia voi käyttää lukiossa useammassakin kohdassa*” (Opettaja 3, kysymys 8), ”*piin historia*” (Opettaja 10, kysymys 8), myös ”*lisätehtävänä esi-*

merkiksi lukujärjestelmien kehittyminen on kiinnostava aihe.” (Opettaja 10, kysymys 11). Jotkut taas mainitsivat näkemyksensä historiallisten sisältöjen joka tapauksessa motivoivasta luonteesta:

> ”*Matematiikan opetuksessa historian linkittäminen motivoi vaikka näkökulma olisi mikä tahansa. Jotain kiinnostaa selkeästi henkilöhistoria ja jotain toista puolestaan ongelmien historia. Itse lähtisin ehkä mieluiten ongelmista…*” (Opettaja 9, kysymys 8)

Jotkut opettajat sen sijaan eivät esittäneet lainkaan esimerkkejä siitä, kuinka he toisivat historiaa matematiikan opetukseensa. Tässäkin tapauksessa tämä selittynee osittain opettajien itsensä kokemalla vierauden tunteella tai tottumuksen puutteella matematiikan historiaa kohtaan: kaksi (Opettajat 6 ja 7) opettajista, jotka kertoivat pyrkivänsä tuomaan historiaa opetukseensa vain niukasti (kysymys 5), jättivät molemmat kysymyksen 8 esimerkkikohdan vastaamatta, ja kolmaskin (Opettaja 10) mainitsi niukasti esimerkkejä,. Edelleen opettajan numero 1 näkemys historiallisista sisällöistä laveasti ”tarinoina” kuvannee samaa ilmiötä: niiden, jotka eivät ole tottuneet sisällyttämään historiaa opetukseensa, näkemys historiallisista sisällöistä on helposti melko vaillinainen.

Toinen kiinnostava huomio kohdistuu eräässä vastauksessa mainittuun ongelmien kytkemiseen henkilöhistorioihin:

> ”*En osaa antaa valmista esimerkkiä, mutta yhdistelmänä henkilöhistoriaa ja historiallista matemaattista ongelmaa. Eli millaisen ongelman edessä tunnettu matemaatikko on ollut ja millaisin keinoin ja teorioin hän on saanut ongelma ratkaistuksi.*” (Opettaja 11, kysymys 8)

Näin vastaaja tulee epäsuorasti esittäneeksi erään historian matematiikkaan tuomisen keskeisistä eduista: vaikka ongelmat sinänsä ovatkin historian tarjoamaa varsinaista matemaattista sisältöä, henkilöhistorioiden ja tapahtumien ja tarinoiden kautta matemaattiset sisällöt saavat kasvot ja ”inhimillistävät” matematiikkaa (esimerkiksi Schubring, 2000, s. 105).

Yhteenvetona todettakoon, että opettajat tuntuisivat suosivan erityisesti henkilöhistorioita ja matematiikan ongelmien historiaa tapoina tuoda historia opetukseensa. Tämä johtunee siitä, että he tunnistavat matemaattisten ongelmien oivallisen luonteen historian tuomiseksi matemaattisten sisältöjen opetukseen, ja edelleen ymmärtävät historian inhimillistävän vaikutuksen, ja sitä kautta sen merkityksen motivaatiolle. Kuitenkin konkreettisella tasolla, esimerkiksi opetusta suunniteltaessa, opettajien omat erittäin vaihtelevat taustat ja kokemus matematiikan historian suhteen ohjaavat suuresti käytäntöä. Tämä liittyy olennaisesti viimeiseen kysymykseen: Mitä esteitä opettajat näkevät historian sisällyttämiselle opetukseen?

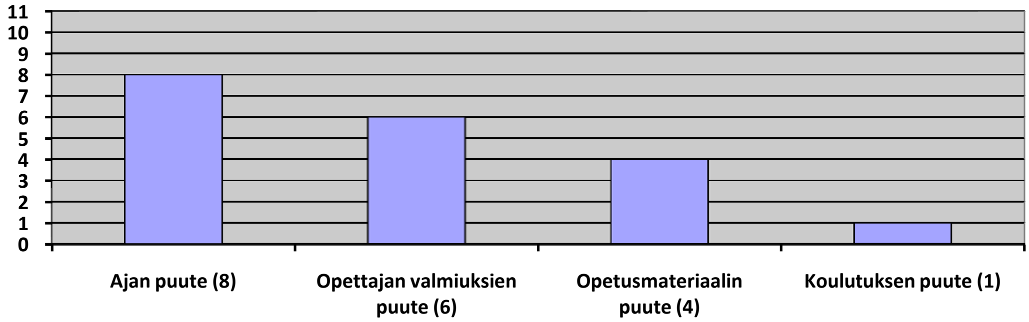
iv. Mitä esteitä opettajat näkevät historian sisällyttämiselle matematiikan opetukseen?

> ”*Omilta kouluajoilta ei ole muistikuvaa matematiikan historian opetuksesta. Omassa opetuksessa puutteena on oma tietojen puutteeni ja ajan puute, etten ehdi hirveästi ottaa selvillekään. Jos esim. opettajan oppaassa olisi lisätietoja ja historiaa, ottaisin sitä opetuksessa helpommin esiin.*” (Opettaja 6, kysymys 11)

> ”*Historiaa olisi mielekästä opettaa koko ajan muun opetuksen rinnalla ja siihen linkittäen. Kuitenkin aika on usein niin rajallinen, että perusasioiden opettelu on vain pakko pistää historian edelle. Sen lisäksi, että historiaa olisi mukana asioiden opettelun rinnalla, voisi yhdeksännellä luokalla olla oppilaille mielekästä perehtyä matikan historiaan enemmän hieman kokonaisvaltaisemmin. En muista juurikaan opiskelleeni matikan historiaa kuin vasta yliopistossa, mutta voin hyvinkin muistaa väärin…*” (Opettaja 7, kysymys 11)

Ensisijaisena rajoitteena matematiikan historian opettamiseksi kaksi puutetta mainittiin yli puolessa vastauksista: kahdeksassa tapauksessa ajan puute sekä kuudessa tapauksessa opettajan valmiuksien puute. Yleinen oli myös maininta materiaalin puutteesta (neljässä tapauksessa). Sen sijaan koulutus mainittiin ensisijaisena rajoitteena vain kerran, kuten myös erään opettajan oma luonnehdinta ”viitseliäisyydestä” (Opettaja 5, kysymys 10). Seitsemässä vastauksista valittiin vähintään kaksi keskeistä rajoitetta.

Jo yllä käsiteltyjen aiempien kysymysten kohdalla todettu kokemus omien mahdollisuuksien rajoitteista liittyy siis pääasiassa kahteen seikkaan: koulumaailmassa yleisesti uhkaavaan ajan puutteeseen, sekä opettajien itsensä kokemaan valmiuksien puutteeseen (vrt. Clark, 2011; Tzanakis & Arcavi, 2000, s. 203). Kuten esimerkiksi opettajan 6 vastauksessa (kysymys 11) ilmenee, esimerkit ja ohjeet historiallisten sisältöjen käytöstä esimerkiksi opettajan oppaassa tai muussa opettajille tutussa materiaalissa voisivat rohkaista ja lisätä historian tuomista opetukseen.



Kaavio 4. Koetut rajoitteet historian sisällyttämiseksi opetukseen

3.2.4. Yhteenveto

Opettajilla tuntuisi yleisesti ottaen olevan myönteinen asenne matematiikan historiaa kohtaan, ja moni mielellään käsittelisikin historiallisia sisältöjä enemmän opetuksessaan, mikäli tiukat aikarajoitteet sallisivat ja heillä olisi parempi käsitys, historian opettamisesta. Opettajat yleisesti ottaen tuntuvat painottavan matematiikan ongelmien historiaa historiallisten sisältöjen opettamiseksi (vrt. Clark, 2011), joskin myös henkilöhistoriallinen lähestymistapa vaikuttaisi olevan suosittu. Matemaattisten ongelmien historiaa lähtökohtana suosiessaan opettajat ovat didaktisesti hedelmällisillä jäljillä, sillä kuten esim. Tzanakis & Arcavi (2000, s. 204–205) esittävät, juuri matematiikan ongelmat mahdollistavat varsinaisten matemaattisten sisältöjen kytkemisen motivoivaan ja uusia näkökulmia ja tarkastelutapoja avaavaan historiaan. Edelleen myös henkilöhistorioilla on paikkansa, inhimillistäessään matematiikkaa, tuomalla mukaan inhimillisten kertomusten ulottuvuuden (Schubring, 2000, s. 105). Yhdistämällä nämä kaksi seikkaa voisi historia tuoda huomattavaa innostavaa ja oppimista edistävää lisäarvoa opetukseen, yleisestä ajanpuutteesta huolimatta.

Tämä kyselytutkimus siis, pienestä otoksestaan ja siitä johtuvasta epäyleistettävyydestään huolimatta, osaltaan vahvistaa matematiikan historiaa käsitelleen teoreettisen (esim. Tzanakis & Arcavi, 2000) ja empiirisen tutkimuksen (esim. Clark, 2011) esille nostamia näkökohtia, sekä antaa äänen opettajien itsensä näkökulmalle näiden omien sanomisten kautta. Kyselyn tarkastelualue on kuitenkin laveahko antaakseen yksityiskohtaisempaa ja käyttökelpoisempaa tietoa monista opettajiin liittyvistä, matematiikan historian opettamista käsittelevistä seikoista. Tällaisia ovat esimerkiksi seuraavat kysymykset:

- Minkälaisista tekijöistä opettajien asenteet matematiikan historiaa kohtaan muodostuvat?
- Kuinka opettajankoulutusta tulisi kehittää matematiikan historian opettamisen edistämisen näkökulmasta?
- Minkälaisin pedagogisin ja didaktisin välinein matematiikan historiaa tulisi opettaa?
- Minkälaista olisi opettajien toivoma matematiikan historiaa sisältävä opetusmateriaali?

Nämä kaikki vaatisivat omaa tutkimustaan, omine kehitettävine mittareineen. Yllä olevan luettelon ensimmäiseen kysymykseen on osin pyrkinyt vastaamaan esimerkiksi Mustafa Alpaslanin johdolla Turkissa syyslukukautena 2010 toteutettu kyselytutkimus opettajaopiskelijoiden asenteista ja uskomuksista matematiikan historiaa opetuksessa kohtaan. Tutkimuksen tarkoituksena on ollut edelleen kehittää kyseessä olevien tutkijoiden kehittämää kyselylomaketta, jossa muutaman kymmenen Likert-asteikollisen kysymyksen avulla on pyritty kartoittamaan matematiikan opettaja-opiskelijoiden matematiikan historiaa kohtaan kokemien positiivisten ja negatiivisten uskomusten ja asenteiden välisiä yhteyksiä. Raportissaan (Alpaslan, 2011) Alpaslan ja kumppanit esittelevät kehittelemänsä kyselylomakkeen luotettavuutta ja käyttökelpoisuutta. Eräs konkreettinen jatkotutkimus voisikin olla kyseisen kyselyn teettäminen ja analysointi Suomessa, niin opettajaopiskelijoiden kuin miksipä ei myös opettajien keskuudessa.

3.3. Oppilaat

Myös oppilaiden suhdetta matematiikan historiaan ja sen opetukseen voidaan niin ikään tarkastella useasta eri näkökulmasta. Esimerkiksi siitä, kokevatko he sen tärkeäksi tai kiinnostavaksi vai eivät, ja kuinka he sen eri muotoja painottaisivat. Näitä näkökulmia sivutaan hieman luvussa 4, jossa esitellään erästä lukiomatematiikan oppitunnilla tehtyä historialliseen matemaattiseen aineistoon perustunutta harjoitusta sekä lukio-opiskelijoilta harjoituksen jälkeen kerättyä palautetta.

Toisen näkökulman matematiikan historian ja oppilaiden väliseen suhteeseen tarjoaa Jankvistin väitöstutkimus, jossa matematiikan historian käyttöä tavoitteena tarkastellaan mm. oppilaiden matematiikkakäsitysten ja niiden muuttumisen kautta. Jankvist tutki väitöskirjassaan ”Using history as a ’Goal’ in Mathematics Education” (Jankvist, 2009b) matematiikan historian käyttöön tavoitteena liittyvää kysymystä oppilaiden käsityksistä ja uskomuksista matematiikasta tieteenalana, sekä niiden muuttumista matematiikan historiaa sisältäneen opetuksen myötä. Tutkimus käsitti yhdessä tanskalaisessa lukioluokassa kahden lukuvuoden aikana tehdyt neljä haastattelua, joissa kartoitettiin oppilaiden käsityksiä matematiikan sosiologisesta ulottuvuudesta, historiallisesta kehityksestä sekä filosofisesta luonteesta. Nämä ovat kaikki Jankvistin tarkasteleman meta-matemaattisen ajattelun osa-alueita.

Sosiologisella ulottuvuudella Jankvist tarkoittaa oppilaiden näkemyksiä matematiikan yhteiskunnallisesta merkityksestä, siis siitä, *mitä merkitystä* matematiikan osaamisella on yhteiskunnassa ja onko sen osaaminen kenties *toisille tärkeämpää* kuin toisille, kuten myös heidän kokemustaan siitä, mihin he tarvitsevat matematiikkaa *jokapäiväisessä elämässään* ja yleisemmin, mihin sitä *yhteiskunnassa yleensä tarvitaan*. Edelleen haastatteluissa kysyttiin opiskelijoiden käsityksiä siitä, onko matematiikka tänä päivänä kenties *tärkeämpää tai vähemmän tärkeää* kuin sata vuotta sitten, sekä sitä, pitävätkö oppilaat matematiikkaa *tieteenä* ja jos pitävät, niin *mitä tämä tiede tutkii*, ja jos eivät, niin mikseivät. (Jankvist, 2009b, s. 206)

Matematiikan historiallista kehitystä Jankvist lähestyi haastatteluissa pääsääntöisesti oppilaiden oppikirjojen kautta, kysyen heiltä, *kuinka*, *milloin* ja *miksi* he uskovat oppikirjoissaan esiintyvän matematiikan saaneen alkunsa, sekä myös sitä, mitä he uskovat matematiikan tutkijan yliopistolla tekevän, ts. *mitä matematiikan tutkimus tar-*

koittaa. Haastatteluissa kartoitettiin myös oppilaiden matematiikan filosofiaan liittyviä kysymyksiä: voiko jokin matematiikan osa-alue *vanhentua ja tulla tarpeettomaksi*, ja jos, niin miten; ovatko *negatiiviset luvut löydetty vai keksitty* ja onko *matematiikka ylipäätään* jotakin, jota löydetään vai keksitään? (Jankvist, 2009b, s. 207)

Neljä haastattelua tehtiin kahden lukuvuoden aikana, noin vuoden sisällä siten, että samoja tai samankaltaisia kysymyksiä sisältäneiden ensimmäisen ja neljännen haastattelun välisenä aikana oppilaiden käymissä matematiikan opinnoissa käytiin läpi kaksi matematiikan historiasta ammentavaa opetusmoduulia: ensin lukion toisen lukuvuoden kevätlukukauden loppupuolella aloitettu ja kolmannen lukuvuoden alkajaisiksi jatkunut 8 viikon mittainen, yhteensä 15 kaksoisoppituntia (á 90 minuuttia) käsittänyt moduuli koodaukseen liittyvästä matematiikasta ja sen sovelluksista mm. viestintäteknologiassa; myöhemmin lukion kolmannen eli viimeisen lukuvuoden viimeisillä 6 viikolla toteutettu yhteensä 14 kaksoisoppituntia (á 90 minuuttia) kattanut moduuli salausjärjestelmistä ja niiden yhteydestä lukuteoriaan, mukana ollen myös G.H. Hardyn tekstiin ”Matemaatikon apologia” (A Mathematician’s Apology) vuodelta 1940 (suom. 1997) perustunut osa puhtaan ja sovelletun matematiikan eroista[6]. Molemmissa moduuleissa oppilailla teetettiin esseitä ryhmätöinä, ohjaamalla nämä etsimään aineistoa ja myös käyttämään valmiiksi annettua aineistoa. Jankvist kuvaa moduulien kulkua yksityiskohtaisesti väitöskirjassaan (ensimmäinen moduuli s. 111–152, toinen moduuli s. 153–204).

Sosiologista ulottuvuutta koskevissa kysymyksissä tutkimuksessa ei havaittu suuria muutoksia käsityksissä matematiikan yleisestä tärkeydestä (Jankvist, 2009b, s. 214). Samoin matematiikan käytön kontekstien osalta vastaukset osoittautuivat samankaltaisiksi, mutta muutokset näkyivät lähinnä opetusmoduulien vaikutuksessa: opiskelijat selvästi heijastelivat vastauksissaan käytyjen moduulien esimerkkejä, kuten kryptografiaa ja koodausta, sekä matematiikan merkitystä näille (Jankvist, 2009b, s. 214). Edelleen haastatteluissa ei selvinnyt selkeitä eroja matematiikan merkityksen mieltämisessä nykyajan ja sadan vuoden takaisen ajan välillä, mutta vastaukset osoittautuivat laajemmin asiaa pohdiskeleviksi, juuri moduulien tarjoamin käsittein: esimerkkinä soveltavasta matematiikasta puhuminen Hardyn tekstiä käsitelleen mo-

[6] Syvempää teoreettista tarkastelua Hardy-moduulin yhteydessä käsitellyn matemaattisen sisältödiskurssin ja meta-matemaattisen diskurssin välisen ”kytkeytymispisteen” ja ”neljän kytkeytymisen tason” tiimoilta, katso esim. Jankvist (2010).

duulin pohjalta (Jankvist, 2009b, s. 216). Sen sijaan ensimmäisissä haastatteluissa havaittu yleinen käsitys matematiikasta kielenä oli alkanut siirtyä enemmän matematiikan käsittämiseksi tieteeksi (Jankvist, 2009b, s. 248). Ensimmäisellä haastattelukierroksella Jankvist oli havainnut opiskelijoilla melko yleisen käsityksen heidän opiskelemaansa matematiikkaan liittyneistä historiallisista henkilöistä outoina tai muuten erikoislaatuisina poikkeusyksilöinä muuttui haastattelujen välillä selkeästi jäsennellymmäksi käsitykseksi matematiikasta hierarkkisena ja aksiomaattisena systeeminä, jossa tiedonvälityksellä on ollut keskeinen rooli (Jankvist, 2009b, s. 217). Matemaatikot miellettiin yhä enemmän tutkijoiksi epämääräisten "vanhojen miesten" sijaan, lisäksi jokaiselle oli kehittynyt jonkinlainen kuva siitä mitä matemaatikot, siis matematiikan tutkijat tekevät, siinä missä alun haastatteluissa moni ei osannut vastata kysymykseen (Jankvist, 2009b, s. 126, 220, 249). Enää ei myös esiintynyt historiallisesti jähmettyneitä näkemyksiä, joiden mukaan matematiikka on ollut olemassa aina (Jankvist, 2009b, s. 249). Moduuleista ammennettiin myös selvästi perusteluja sen tueksi, löydetäänkö vai keksitäänkö matematiikkaa (vrt. 2.2.4): lopussa opiskelijat olivat alkua taipuvaisempia näkemään matematiikan jonakin jota keksitään, löytämisen sijaan, joskin monet mainitsivat sen olevan yhdistelmä näitä molempia; että matemaattisia objekteja löydetään, mutta ratkaisuja keksitään (Jankvist, 2009b, s. 221, 248). Myös varmuus matematiikan luonnetta koskevien näkemysten perusteluista oli vahvempi viimeisessä haastattelussa (Jankvist, 2009b, s. 249).

Jankvist toteaakin, että uskomusten muutoksissa ei keskeisintä ole välttämättä muutoksen kohde, siis se mitä uskomukset koskevat, sillä siinä havaittiin aina viimeisiin haastatteluihin asti selviä eroja yksittäisten opiskelijoiden välillä, vaan historian tarjoamat mahdollisuudet opiskelijoille pohtia ja punnita omia näkemyksiä ja uskomuksiaan: uudet näkökulmat haastamaan heidän uskomuksiaan ja lopulta mahdollisuudet jäsennellymmän ja perustellumman näkemyksen muodostamiseksi (Jankvist, 2009b, s. 257). Eräs opiskelija kuvasivatkin moduuleja "silmien avaajiksi", sille kuinka matematiikalla onkin suurempi merkitys kuin hän oli ennestään kuvitellut (Jankvist, 2009b, s. 256).

Matematiikan historian opettamisella näyttäisi siten olevan selvästi vaikutusta opiskelijoiden matematiikkaa koskeviin käsityksiin ja uskomuksiin. Tämä onkin juuri

Jankvistin mainitseman lähtökohdan ”matematiikka tavoitteena” päämäärä: tarjota välineitä ja kasvualustaa meta-tason matemaattiselle ajattelulle ja matematiikan luonnetta koskevien käsitysten haastamiselle, sekä siten perustellumpien ja jäsentyneempien näkemysten muodostamiselle.

Kuten edellä jo mainittiin, myös luvussa 4 sivutaan opiskelijoiden näkökulmaa, tällöin suomalaisten lukiolaisten palautteen muodossa.

3.4. Oppikirjat

Kuten on jo useaan otteeseen mainittu, eräs kriittisimmistä matematiikan historian opettamista määrittävistä seikoista on opetusmateriaalien saatavuus ja sisältö. Taatusti yleisimpänä opetusmateriaalina opettajat pitävät oppikirjaa. Mutta koska oppikirjoja ei enää sitten vuoden 1992 ole Suomessa kouluhallinnon puolesta tarkastettu, voi niiden sisällöissä ja etenkin esitystavoissa olla suurta hajontaa ja pahimmillaan jopa huomattavia puutteita opetussuunnitelman tavoitteiden näkökulmasta. Esimerkiksi Jukka Törnroos on havainnut väitöstutkimuksessaan 5-7. luokkalaisilla oppilailla huomattavia eroja matematiikan sisältöjen osaamisessa, johtuen oppikirjojen painotuksista. Kuitenkin matematiikan opettajien valtava enemmistö on perinteisesti luottanut oppikirjan voimaan ja ohjaukseen opetuksessa (Törnroos, 2004).

Matematiikan historian osalta oppikirjojen hajonnalla voisi olettaa olevan erityisen paljon vaikutusta lukion oppikirjoihin, sillä lukion opetussuunnitelmassa matematiikan historiaa ei sellaisenaan edes mainita. Tässä kappaleessa käydään lyhyesti läpi kahden eri lukion pitkän oppimäärän koko 13 kurssin kirjasarjojen vertailua (kertauskurssin 14 kirjoja ei tarkasteltu). Kirjasarjoiksi valittiin viimeisimpiin lukion opetussuunnitelman perusteisiin (LOPS, 2003) perustuvat kahden eri kustantamon sarjat, Laudatur (Otava) ja Matematiikan taito (WSOY). Syynä näiden kahden nimenomaisen kirjasarjan valintaan on ensivaikutelman perusteella havaittu suurin mahdollinen ero suurimpien kustantamoiden lukion pitkän oppimäärän oppikirjasarjoista.

Sisältöjä on tarkasteltu siten, että jokaisen kirjan jokaista sivua (lukuun ottamatta sisällysluetteloa) on tarkasteltu erikseen siitä näkökulmasta, löytyykö siltä mainintaa matematiikan historiasta tai muuten matematiikan historiaan tai matemaatikoihin viittaavaa sisältöä. Joissakin tapauksissa tämä on ollut helppoa, esimerkiksi kuuluisan matemaatikon elinvuodet ilmoittavien alaviitteiden tapauksessa, mutta paikoin on jouduttu käyttämään harkintaa sen suhteen, voidaanko jotain sisältöä pitää enää historiaa käsittelevänä. Näin on esimerkiksi kirjan Laudatur 12 huomattavan määrän matemaatikoiden mukaan nimettyjen lauseiden ja menetelmien (kuten Bolzanon lause, Newtonin menetelmä…) tapauksessa. Mikäli näitä ei ole erikseen taustoitettu, kytkemällä niitä historialliseen tilanteeseen, historiassa askarruttaneeseen ongelmaan tai kertomalla jotain henkilöstä joiden mukaan kyseessä oleva asia on nimetty, ei näitä tässä tarkastelussa ole luokiteltu historialliseksi sisällöksi, kuten ei olisi mieltä tehdä esimerkiksi Pythagoraan lauseenkaan tapauksessa, ellei samassa yhteydessä ole mainintaa tai muuta viitettä Pythagoraasta historiallisena henkilönä. Myöskään muiden alojen historiaa sisältäviä osioita ei ole luokiteltu tässä tarkastelussa matemaattis-historialliseksi, mikäli näiden yhteydessä ei tuoda esille jotakin historiallisesti liittyvää ja matematiikan historian kannalta keskeistä oivallusta tai sovellusta (esimerkkinä Thomas Malthusia ja väestöräjähdystä koskeva osio kirjassa Laudatur 1, s. 154-155).

Edelleen jokainen historiallista sisältöä sisältävä sivu on luokiteltu yhden tai useamman historiallisen sisältötyypin mukaisesti Tzanakiksen ja Arcavin (2000, s. 214) sekä Clarkin (2011) tarjoamien luokittelujen innoittamina. Kullakin sivulla voi siis olla ja monesti onkin useiden luokkien sisältöä. Näitä luokkia ovat (suluissa taulukoissa käytettävä lyhenne):

- *prologit* (PRO): asiaan johdattelevat viittaukset historiaan; tämä voi tarkoittaa kokonaista johdantolukua, jonka lähtökohtana on historia, mutta myös suppeammin varsinaisen teoriatekstin joukossa olevaa johdantokappaletta tms.; yleensä asian kontekstualisointia ennen varsinaista matemaattista sisältöä; esimerkiksi logiikan historiaa käsittelevä aukeama (Laudatur 11, s. 6-7),
- *epilogit* (EPI): varsinaisen teoriatekstin jälkeen sijaitsevat yhteenvedot tai taustoitukset, joiden näkökulma on historiassa; henkilöhistoriat, anekdootit yms.; esimerkiksi Ernst Lindelöfiä ja funktioteoriaa esittelevä sivu (Laudatur 1, s. 114),

- *harjoitustehtävät* (HT): historiallinen sisältö, joka on kytketty keskeisesti oppikirjan harjoitustehtävään; esimerkiksi harjoitustehtävä Daniel Bernoullista ja Pietarin paradoksista (Matematiikan taito 6, s. 117),
- *henkilöhistoriallinen sisältö ja anekdootit* (HH): sekä laajemmat henkilöhistoriaa esittelevät katsaukset kuin myös lyhyet anekdootit matematiikan historiasta; esimerkiksi Bertrand Russellin elämän esittelyä (Laudatur 11, s. 114) ja tarina René Descartesin koordinaatiston keksimisestä katossa liikkuvaa kärpästä seuratessaan (Matematiikan taito 4, s. 33),
- *matemaattisiin ongelmiin liittyvä historia* (O): niin kuuluisien matemaattisten ongelmien esittelyä kuin opiskelijoiden taidoille sopivia historiasta tuttujen ongelmien teettämistä harjoitustehtävinä; esimerkiksi Fermat'n suuri lause (Laudatur 2, s. 28) ja Samuel Pepysin Newtonille 1693 esittämä ongelma (Matematiikan taito 6, s. 141), sekä
- *nippelitieto* (N): erittäin suppea historiallinen fakta, esimerkiksi jonkin matematiikon elinvuodet tai jonkin matemaatikon ja matemaattisen käsitteen välinen yhteys; esimerkiksi Niels Henrik Abelin kunniaksi käytössä oleva tyhjän joukon merkki, norjalaisen aakkoston Ø (Laudatur 1, s. 10).

Lisäksi kustakin kirjasta on laskettu, kuinka monta matemaatikon tai muuten kyseessä olevaan matematiikan sisältöön liittyvän eri henkilön nimeä kirjassa on mainittu. Usein sama henkilö esiintyy kirjassa useassa yhteydessä, mutta lukumääriä laskettaessa huomioidaan nimenomaisesti eri nimien lukumäärä kussakin kirjassa.

Prologit, epilogit, nippelitieto, henkilöhistoriallis-anekdoottiset osat kuuluvat kaikki luonnollisesti Jankvistin valaisemiskategoriaan (ks. 2.3.1.). Samoin suuri osa harjoitustehtävistä ja matemaattisia ongelmia esittelevistä sisällöistä on luonteeltaan valaisevaa historiaa, mutta joissakin tapauksissa, esimerkiksi tutkimustehtävien kohdalla nämä lähestyvät myös moduuliluonnetta.

Liitteenä (liite 3) on taulukko kunkin kirjan sisällöstä luokiteltuna, sisältäen myös kattavan luettelon kussakin kirjasarjassa mainituista nimistä. Taulukot sisältävät tiedon siitä, kuinka monta sivua kussakin kirjassa on (pl. sisällysluettelo), kuinka moni näistä sivuista on harjoitustehtäväsivuja, sekä kuinka monella sivulla on historiasisällöksi luokiteltua aineistoa ja kuinka suuri osuus historiaa sisältävillä sivuilla on koko kirjan sisältöön (pl. sisällysluettelo) nähden. Historiallinen sisältö on edelleen luokiteltu edellä kuvailtuun kuuteen eri tyyppiin, ja taulukkoon on kerätty tieto siitä, kuinka monella sivulla kyseessä olevaa historiasisällön luokkaa esiintyy, sekä siitä, kuinka suuressa osassa (prosentin tarkkuudella) historiaa sisältäviä sivuja kyseistä sisältöluokkaa esiintyy. Esimerkiksi kirjassa Laudatur 1 historiasisältöä löydettiin 14 sivulta, joista suurimmassa osassa (noin 93 %) esiintyi jotakin nippelitiedoksi luokiteltua sisältöä ja harvimmin (noin 7 % sivuista) epilogiseksi luokiteltua sisältöä:

	sivuja	teht.	historiaa	h%	PRO	EPI	HT	HH	O	N	nimiä
Laudatur 1	198	58 sivua	14 sivulla	7,1	5 36 %	1 7 %	4 29 %	3 21 %	4 29 %	13 93 %	12

Alla olevasta taulukosta selviävät kirjasarjojen keskiarvot. Keskiarvoissa on huomioitu vain niiden kirjojen sisältö, joista löytyi historiasisältöä edes jonkin verran. Kirjassa Laudatur 7 historiasisältöä ei esiintynyt lainkaan, joten se ei ole mukana keskiarvolukemissa.

	sivuja	teht.	historiaa	hist %	PRO	EPI	HT	HH	O	N	nimiä
Laudatur keskiarvo (pl. Laudatur 7)	166 sivua	46 sivua/ kirja	8,7 sivulla/ kirja	5,2	22 %	8 %	27 %	36 %	52 %	67 %	yht. 71 eri nimeä
Matematiikan taito keskiarvo	148 sivua	51 sivua/ kirja	5,5 sivulla/ kirja	3,6	3 %	2 %	52 %	5 %	63 %	81 %	yht. 49 eri nimeä

Ensimmäisenä huomio kiinnittyy historiaa sisältävien sivujen suhteelliseen määrään. Laudaturissa historiaa on keskimääräisesti jonkin verran enemmän. Edes Matematiikan taidon suurempi harjoitustehtäväsivujen osuus ei selitä eroa, sillä valtaosa (52 %) Matematiikan taidon historiasisällöstä on juuri harjoitustehtävissä. Nippelitiedon suuri määrä molemmissa kirjasarjoissa (Laudatur 67 % historiasivuista; Matematiikan taito 81 % historiaa sisältävistä sivuista) ei yllätä, onhan se helppo tapa saada historiallisia ripauksia keventämään muuten ehkä raskasta teoreettista tekstiä. Sen sijaan muiden historialuokkien suhteellisten osuuksien erot ovat kiinnostavia ja keskeisiä. Verrattuna Matematiikan taitoon, matematiikan ongelmia esitellessäänkin

Laudatur lähestyy historiaa enemmän inhimillisestä näkökulmasta, henkilöiden ja anekdoottien avulla, mm. prologien ja epilogien kautta (esim. kuva 2).

LUKUTEORIA

Lukuteoria tutkii kokonaislukuja, niiden ominaisuuksia ja niiden välisiä suhteita. Lukuteorialla on pitkä historia. Esimerkiksi Pythagoraan lauseen toteuttavat lukukolmikot on tunnettu monessa muinaisessa kulttuurissa. Pythagoralainen antiikin ajan aritmetiikka on säilynyt Euklideen *Elementassa* (300 eKr.). Antiikin tärkein lukuteoreetikko on Diofantos (250 jKr.), jolta on säilynyt osia teoksesta *Arithmetika*.

Lukuteoria on kiehtonut suuria matemaatikkoja kautta aikojen, ja Carl Friedrich Gauss (1777–1855) kutsui sitä matematiikan kuningattareksi. Lukuteoriaan liittyvät probleemat ovat usein käsitettävissä peruslaskutaidoilla, mutta väittämien todistaminen on vaatinut vuosisatoja ja nykymatematiikan järeitä työkaluja. Kaikkia väittämiä ei ole vielä todistettu.

Lukuteorian tunnetuimpia ongelmia on Fermat'n suuri lause: "Yhtälöllä $x^n + y^n = z^n$ ei ole nollasta eroavia kokonaislukuratkaisuja x, y ja z, jos $n \in \mathbb{Z}$ ja $n > 2$. Pierre de Fermat'n (1601–1665) esittämä lause oli 350 vuotta todistamatta, kunnes vuonna 1995 englantilainen Andrew Wiles laati 150-sivuisen todistuksen, jossa käytetään modernia matematiikkaa. Matematiikan suureksi arvoitukseksi jää Fermat'n kirjoittama reunahuomautus, jossa hän toteaa keksineensä lauseeseen hienon todistuksen, mutta se ei mahtunut kyseiselle sivulle. Fermat'n mainitsemaa todistusta ei ole löytynyt mistään teksteistä.

Fermat'n väittämän, että jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan esittää enintään neljän neliön summana $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = n$, todisti 1700-luvun jälkipuoliskon merkittävin ranskalaismatemaatikko *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813).

Catalanin väittämän mukaan yhtälöllä $x^p - y^q = 1$, missä x, y, p, ja q ovat lukua 1 suurempia kokonaislukuja, on vain yksi ratkaisu $3^2 - 2^3 = 1$. Vuonna 2002 romanialainen matemaatikko Preda Mihailescu todisti tämän väitteen oikeaksi. Väitteen oli vuonna 1844 julkaissut belgialainen matemaatikko Eugène Charles Catalan (1814–1894).

Lukuteorian merkitys on kasvanut suuresti nykyaikana, koska lukuteorian tuloksia hyödynnetään tietokoneita ja erityisesti salausmenetelmiä kehitettäessä. Salauksissa käytetään esimerkiksi kahden suuren (100–200-numeroisen) alkuluvun tuloa. Tulo voidaan julkaista, mutta on erittäin vaikeata päästä selville siitä, mitkä kaksi alkulukua on kerrottu keskenään. Helpohkona tapauksena voi miettiä minkä, kahden alkuluvun tulo on 700 613.

Kuva 2. Johdantoa lukuteoriaan kirjassa Laudatur 11, s. 51

Siinä missä Matematiikan taidossa prologeja, epilogeja, henkilöhistoriallisia elementtejä ja anekdootteja esiintyy kutakin selvästi alle kymmenesosalla historiapitoisista sivuista, Laudaturissa kutakin sisältöluokkaa esiintyy suhteellisen tasaisesti: epilogeja lukuun ottamatta (joita niitäkin on selvästi enemmän kuin Matematiikan taidossa) jokaista sisältöluokkia esiintyy vähimmillään joka viidennellä historiaa sisältävistä sivuista. Matematiikan taito taas esittelee historiaa erityisesti ongelmien ja opiskelijoille sopivien harjoitustehtävien kautta (kuten todettua, Matematiikan taidossa tehtävien osuus on muutenkin hieman suurempi kuin Laudaturissa). Matematiikan taidon rikkainta historia-antia ovat tutkimustehtävät, joissa opiskelijat syventyvät johonkin matematiikan historian ongelmaan ja/tai henkilöön, sekä muutamat todella hyvät vaikkakin hankalanpuoleiset harjoitustehtävät.

7b Kompleksiluvut

Kun olemme käsitelleet toisen asteen yhtälöitä, meille on aiheutunut haittaa siitä, että negatiivisen luvun neliöjuuri ei ole määritelty. Tämä haitta voidaan kuitenkin poistaa.

Cardano[2] tarkasteli 1545 kirjassaan *Ars Magna* yhtälöä $x(10-x) = 40$ kirjoittaen seuraavasti[3]: ”Kiinnittämättä huomiota asian vaatimaan henkiseen kidutukseen kerro keskenään $5 + \sqrt{-15}$ ja $5 - \sqrt{-15}$. Tulos on $25 - (-15) = 40$.” Hän jatkoi: ”Niin etenee aritmeettinen syvällisyys kohti päämäärää, joka on yhtä hienostunut kuin hyödytön”. Hyödyttömyyden suhteen Cardano oli väärässä, sillä negatiivilukujen neliöjuurien käyttö on osoittautunut erittäin hyödylliseksi sekä matematiikan teoriassa että sovelluksissa.

Kuvitelkaamme, että on olemassa sellainen ”luku” i, jolle $i^2 = -1$, ja että luvun i ja reaalilukujen välillä voidaan suorittaa laskutoimituksia tavanomaisten sääntöjen mukaan. Tällöin myös $(-i)^2 = -1$. Kutsumme i:tä *imaginaariyksiköksi* (imaginaarinen = kuviteltu, näennäinen < *lat.* imaginarius < imago = kuva). Muotoa $a + bi$ olevia lausekkeita, missä a ja b ovat reaalilukuja, kutsumme *kompleksiluvuiksi*.

a) Laske i^3, i^4, i^5, i^6, i^7 ja i^8.
b) Laske i) $(1+i)^2$ ii) $(a+bi)^2$, iii) $(a+bi)(a-bi)$.
c) Ratkaisemalla yhtälön $x^2 - 2x + 2 = 0$ saamme $x = 1 \pm \sqrt{-1}$, missä $\pm\sqrt{-1}$ tarkoittaa lukuja $\pm i$. Tämän yhtälön ratkaisu on siis $x = 1 \pm i$. Tarkista tulos sijoittamalla se yhtälöön.
d) Ratkaise kompleksialueella yhtälö $x^2 - 4x + 13 = 0$.
e) Mitä voidaan sanoa kompleksialueella i) toisen asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärästä, ii) toisen asteen polynomin jakamisesta ensimmäisen asteen tekijöihin?

[1] Fibonacci, oikealta nimeltään Leonardo Pisalainen (1170–1250), italialainen matemaatikko.
[2] Girolamo Cardano (1501–1576), italialainen matemaatikko.
[3] Lähde: M.Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford Univ. Pr., 1972).

Kuva 3. Harrastustehtävä kompleksiluvuista kirjassa Matematiikan taito 1-2, s. 216

Tutkimustehtävät (esimerkiksi kompleksiluvuista ja polynomiyhtälöiden ratkaisemisen historiasta, katso kuvat 3 ja 4) ovat monessa tapauksessa monipuolisia ja syvällisiäkin, mutta sijaitsevat pääsääntöisesti varsinaisen tekstin ulkopuolella, esimerkiksi kirjan lopussa, jääden joko opiskelijan oman harrastuneisuuden tai opettajan painotuksen ja valinnan varaan.

8b Polynomiyhtälöiden ratkaisemisen historiaa

Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöitä osattiin ratkaista jo muinaisessa Babyloniassa 2000 eKr. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavojen keksimiseen vaikuttivat italialaiset Scipione del Ferro (1456–1526), Tartaglia (1499–1557), Girolamo Cardano (1501–1576) ja Lodovico Ferrari (1522–1565). Selvitä jostakin lähteestä, mitä kukin heistä teki tällä alalla.

Norjalainen Niels Henrik Abel (1802–1829) ja ranskalainen Evariste Galois (1811–1832) tutkivat viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöitä. Ota selvää, mitä he saivat aikaan. Selvitä myös, miksi kummankin elämä jäi lyhyeksi.

Suomenkielisiä lähteitä: E.T.Bell, *Matematiikan miehiä* (WSOY, 1963); C.Boyer, *Tieteiden kuningatar I–II* (Art House, 1994); M.Lehtinen, *Matematiikan lyhyt historia* (Yliopistopaino, 1995).

Matemaatikoiden elämäkertoja löytyy nettiosoitteesta
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

217

Kuva 4. Harrastustehtävä polynomiyhtälöiden ratkaisun historiasta kirjassa Matematiikan taito 1-2, s. 217

Samoin monet hyvät historiaa sisältävät harjoitustehtävät ovat loppupään laajoiksi ja vaikeammiksi merkittyjä tehtäviä, kuten esimerkiksi Pierre de Fermat'n eräässä integraalitodistuksessa harjoittaman huolettoman äärettömyyden käsittelyn punnitsemistehtävä (Kuva 5).

Myös siinä, minkä kurssin kirjoissa historiaa kuinkin paljon esiintyy, on kirjasarjoissa selkeitä eroja. Kuten mainittua, Laudaturissa vähiten historiaa esiintyy kirjassa 7: Derivaatta, siinä missä kyseisen kurssin Matematiikan taito -kirjassa historiaa esiintyy sarjalle hyvin keskimääräisesti, liki 5 prosentilla sivuista. Vastaavasti Matematiikan taito -sarjan historiallisesti köykäisin anti on kirjassa 9, Trigonometriset funktiot ja lukujonot, jonka historiasisältö rajoittuu tasan yhteen harjoitustehtävään: Laudatur 9 -kirjassa historiaa esiintyy peräti 12 sivulla, kirjan yltäessä näin kirjasarjan kärkikolmikkoon historiasisältöjen suhteellisessa määrässä. Edelleen Laudaturin selkeästi eniten historiaa sisältävä kirja on Laudatur 11, Lukujonot ja sarjat (19 % sivuista historiaa, vastaavassa Matematiikan taidon kirjassa vain 4,5 %), kun taas Matematiikan taidossa eniten matematiikan historiaa esiintyy kirjassa Matematiikan taito 12 (15 % historiaa, vastaavassa Laudaturin kirjassa vain 2,2 %). Painotukset ovat siis siten paitsi historiasisältöluokkien, myös matemaattisten sisältöjen historiapitoisuuden suhteen kovin erilaisia kirjasarjojen välillä.

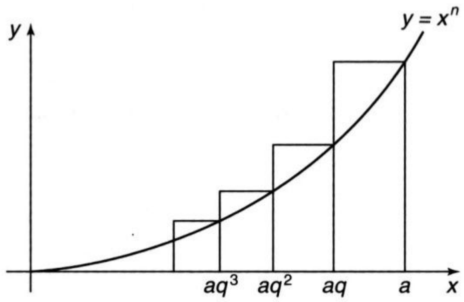
240. Ranskalaista Pierre de Fermat'ta (1601–1665) voidaan pitää kaikkien aikojen parhaana matematiikan harrastajana. Hän oli näet ammatiltaan lakimies, mutta kuuluu matemaattisilta saavutuksiltaan matematiikan historian suurin nimiin. Aikalaistensa tapaan hänkin käsitteli äärettömyyttä varsin huolettomasti. Olkoon $a > 0$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Fermat todisti seuraavalla tavalla, että

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Olkoon $0 < q < 1$. Jaetaan väli $[0, a]$ osaväleihin niin, että jakopisteet oikealta vasemmalle ovat $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$. Tähän jakoon D liittyy yläsumma

$$\begin{aligned}
S_D &= a^n(a - aq) + (aq)^n(aq - aq^2) + (aq^2)^n(aq^2 - aq^3) + \ldots \\
&= a^{n+1}(1 - q) + a^{n+1}q^{n+1}(1 - q) + a^{n+1}q^{2n+2}(1 - q) + \ldots \\
&= a^{n+1}(1 - q)(1 + q^{n+1} + q^{2n+2} + \ldots) \\
&= a^{n+1}(1 - q)[1 + q^{n+1} + (q^{n+1})^2 + \ldots] \\
&= a^{n+1} \frac{1 - q}{1 - q^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1 + q + q^2 + \ldots + q^n}.
\end{aligned}$$

Kun $q \to 1$, viimeinen lauseke lähestyy lukua $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, mistä väitös seuraa. Hyväksytkö tämän todistuksen?



Kuva 5. Harjoitustehtävä 240 kirjassa Matematiikan taito 13, s. 128

Nimien osalta Laudatur osoittautuu niin ikään selkeästi runsaammaksi. Lisäksi Matematiikan taidossa suuri osa nimistä alaviitteissä, mukana vain syntymä- ja kuolinvuosi, kun taas Laudatur esittelee enemmän historiallisia henkilöitä ja heidän saavutuksiaan ja edesottamuksiaan tekstin joukossa, ja enemmän muutenkin.

Yhteenvetona huomataan, että kirjasarjat edustavat kahta erilaista tapaa lähestyä matematiikan historiaa opetuksessa: Laudatur yleisen kontekstualisoinnin (prologit ja epilogit), inhimillisten tarinoiden ja heihin kytkeytyvien ongelmien kautta; Matematiikan taito matematiikan historian ongelmien kautta, erityisesti opiskelijoille itselleen sopivia harjoitustehtäviä hyödyntäen. Kuitenkin erityisesti Matematiikan taidossa matematiikan historiaa on lopulta kovin vähän, ja lisäksi hedelmällisimmät historiasisällöt sijaitsevat usein varsinaisen tekstin tai varsinaisten tehtävien ulkopuolella, kirjan lopussa olevina harrastus- ja tutkimustehtävinä, joten mikäli kirjaa käyttävällä opettajalla ei ole erityistä mielenkiintoa tai harrastuneisuutta itsellään painottaa kyseisiä osia, on vaarana, että kirjojen tarjoama matematiikan historiaa sivuava sisältö jää kauas lupaavasta, mutta niukanpuoleisesta potentiaalistaan.

4. Yhden oppitunnin mittainen kokeilu historiallisen aineiston käyttämisestä lukiossa

Tässä luvussa kuvaan lyhyesti yhdellä lukion oppitunnilla (75 min) tekemäni kokeilun historiallisen aineiston käyttämisestä opetuksessa, omia ajatuksiani sen toteuttamisesta ja toteutumisesta, kuten myös joitain näkökohtia opiskelijoiden palautteesta. Tein kokeilun osana syventävää opetusharjoitteluani, lukion pitkän oppimäärän viidennellä pakollisella vektoreita käsittelevällä kurssilla MAA5.

4.1. Alkuteksti: *Elements of Quaternions* (1866)

SECTION 4.—*On Coefficients of Vectors.*

12. The *simple* or *single* vector, α, is also denoted by 1α, or by $1 . \alpha$, or by $(+1)\,\alpha$; and in like manner, the *double* vector, $\alpha + \alpha$, is denoted by 2α, or $2 . \alpha$, or $(+2)\,\alpha$, &c.; the *rule* being, that for any algebraical integer, m, regarded as a *coefficient* by which the vector α is *multiplied*, we have always,

$$1\alpha + m\alpha = (1 + m)\,\alpha;$$

the symbol $1 + m$ being here interpreted as in algebra. Thus, $0\alpha = 0$, the zero on the one side denoting a *null coefficient*, and the zero on the other side denoting a *null vector;* because by the rule,

$$1\alpha + 0\alpha = (1 + 0)\,\alpha = 1\alpha = \alpha, \text{ and } \therefore 0\alpha = \alpha - \alpha = 0.$$

Kuva 6. Vektorien monikerrat ja nollalla kertominen teoksessa *Elements of Quaternions* (Hamilton, 1866, s. 8)

Oppitunnille, jonka aiheena oli vektorien kertominen (reaali)luvulla, olin suunnitellut ryhmissä tehtävän 30 minuuttia kestävän harjoituksen alkutekstiin perehtymisestä ja uuden asian opiskelusta sen avulla. Alkutekstiksi valikoitui William Rowan Hamiltonin (1805–1865) teos *Elements of Quaternions* (1866), jonka poikansa William Edwin Hamilton toimitti itse kirjoittajan kuolemaa seuraavana vuotena. Hamilton oli suunnitellut kirjastaan noin 400-sivuista, ja arvellut sen kirjoittamisen vievän noin kaksi vuotta aikaa. Työ kuitenkin venyi seitsenvuotiseksi, päättyen Hamiltonin kuolemaan, viimeisen luvun jäädessä keskeneräiseksi. Julkaistuna teos käsitti lopulta kolme nidettä kaikkinensa liki 900 sivulla. Tekstin eräs keskeinen etu sen käytön puolesta opetuksessa verrattuna suurimpaan osaan muita historiallisia matemaattisia tekstejä on sen englanninkielisyys ja siten suomalaislukiolaisen näkökulmasta edes kohtalainen mahdollinen ymmärrettävyys.

Ensimmäisen kirjan johdantoluvun sivuilla 8-9 (kyseiset sivut kokonaisuudessaan liitteenä 4) käydään läpi vektorien luvulla kertomiseen liittyviä sääntöjä ja huomioita. Aluksi vektorin luvulla kertomista ja sen sääntöjä käsitellään yksikkövektorin ja moninkertaistamisen, so. positiivisella kokonaisluvulla kertomisen kautta, sekä monikertojen yhteenlaskuna (kuva 6). Samalla todetaan nollalla kertomisen intuitiivinen, algebrallinen tulkinta ja esitellään nollavektori. Tämän jälkeen todetaan niin ikään polynomien algebrasta ja erityisesti polynomilaskennasta tutut luvulla kertomisen liitännäisyys ja osittelulaki kaksinkertaistamista kuvaavan havainnollisen mallikuvan tukemana (kuva 7).

13. It follows that ***whatever two whole numbers*** **(positive or negative, or null) may be represented by** ***m*** **and** ***n*****, and** ***whatever two vectors*** **may be denoted by α and β, we have always, as in algebra, the formulæ,**

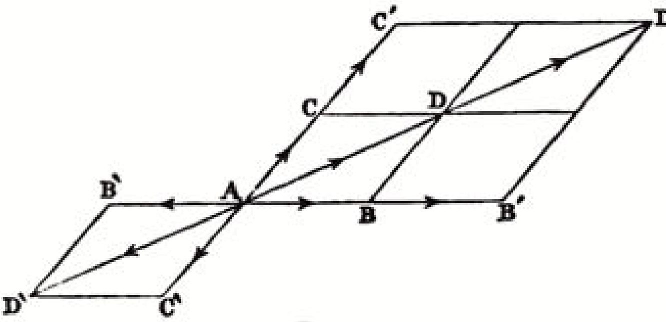


Fig. 12.

$$n\alpha \pm m\alpha = (n \pm m)\,\alpha, \qquad n\,(m\alpha) = (nm)\,\alpha = nm\alpha,$$

and (compare Fig. 12),

$$m\,(\beta \pm \alpha) = m\beta \pm m\alpha\,;$$

Kuva 7. Vektorien luvulla kertomisen osittelulaki ja liitännäisyys teoksessa *Elements of Quaternions* (Hamilton, 1866, s. 8)

Tästä kirja sitten, luvulla jakamisen ja murtoluvulla kertomisen säännöt esiteltyään, etenee lopuksi yleisiin reaaliluvulla kertomisen periaatteisiin ja sen vaikutukseen vektoreihin, siis niiden suuntaan ja pituuteen. Jo mainitun englanninkielisyytensä lisäksi teksti valittiin opetukseen käytettäväksi myös sen toisaalta tiiviin, mutta samalla melko havainnollisen ja selkeän esitystapansa vuoksi. Eteneminen tapahtuu luonnollisesti ja pedagogisesti harkittujen siirtymien kautta, lähtien yksinkertaisesta ja intuitiivisesta geometrisen moninkertaistamisen esittämistä niin kuvallisesti kuin sanallisestikin, viettäen lopulta kohti yleisempää muotoa, laajentaen kuvan lopulta kokonaiseksi, lukusuoralta tuttujen negatiivisilla ja irrationaalisilla luvuilla kertomisen tapaan. Etenkin ensimmäisellä sivulla aiheesta (sivu 8) nostetaan keskeiset säännöt ja kuvallinen havainnollistus tekstistä visuaalisestikin esille, alleviivaamaan niiden keskeisyyttä. Keskeiset haasteet varsinaisen sisällön ymmärtämisen lisäksi lukio-opiskelijalle lienevät merkintöjen lievä poikkeavuus heille tuttuihin merkintätapoihin nähden (jossa vektoreita tavallisesti kuvataan ylleviivatuin pienin kirjaimin) sekä mahdollisesti vieras matematiikan englanninkielinen sanasto. Kuitenkin merkintätavan ero on siinä määrin pieni että tulkitseminen on huolellisen tutkimisen myötä aivan mahdollista. Lopun (kappale 15) sanallinen selitys reaaliluvulla kertomisen periaatteista on toki huomattavasti alkupäähän verrattuna erilaista luettavaa, muttei välttämättä sen vaikeampaa, muun muassa opiskelijoille melko tuttujen merkintätapojen ja kertovan muotonsa vuoksi (kuva 8).

15. For any actual vector α, and for any coefficient x, of any of the foregoing kinds, the *product* $x\alpha$, interpreted as above, represents always a *vector* β, which has the *same direction* as the *multiplicand-line* α, if $x > 0$, but has the *opposite* direction if $x < 0$, becoming *null* if $x = 0$. Conversely, if α and β be *any two actual vectors*, with directions *either* similar *or* opposite, in *each* of which two cases we shall say that they are *parallel vectors*, and shall write $\beta \parallel \alpha$ (because *both* are then *parallel*, in the *usual* sense of the word, to *one common line*), we can always find, or conceive as found, a *coefficient* $x \gtrless 0$, which shall satisfy the equation $\beta = x\alpha$; or, as we shall also write it, $\beta = \alpha x$; and the positive or negative *number* x, so found, will bear to ± 1 the same *ratio*, as that which the *length* of the line β bears to the length of α.

Kuva 8. Vektorien luvulla reaaliluvulla kertomisen vaikutus vektorien suuntaan ja pituuteen teoksessa *Elements of Quaternions* (Hamilton, 1866, s. 8)

4.2. Tehtävä ja sen toteutus

William Rowan Hamiltoniin liittyviä anekdootteja ja kvaternioiden keksimistä ja merkitystä esitelleen tarinallisen pohjustuksen jälkeen opiskelijat saivat tehtäväksi lukea 3-4 hengen ryhmissä mainitut sivut, jotka jaettiin joka oppilaalle monisteena. Jankvistin (ks. 2.3.1.) jaottelun mielessä tehtävää voitaneen pitää hyvin suppeana moduulina. Opiskelijoita ohjeistettiin kääntää lukemaansa suomeksi ja itselleen tutuille merkinnöille, sekä etsimään opastetusti vektorin luvulla kertomisen sääntöjä ja sitä mihin luvulla kertominen vaikuttaa, kiinnittämällä huomiota seuraaviin kohtiin:

1) *Kirjoita itsellesi tutuin merkinnöin tekstissä esiintyvä*

$$1a + ma = (1 + m)\,a$$

Mitä tarkoittaa kaavassa α, entä m? Mitä kaava kuvaa?

2) *Kirjoita itsellesi tutuin merkinnöin tekstissä esiintyvä*

$$1a + 0a = (1 + 0)\,a = 1a = a, \text{ and } \therefore 0a = a - a = 0.$$

Mitä tämä tarkoittaa (omin sanoin)?

3) *Kirjoita itsellesi tutuin merkinnöin tekstissä esiintyvä*

$$na \pm ma = (n \pm m)\,a, \qquad n\,(ma) = (nm)\,a = nma,$$

sekä

$$m\,(\beta \pm a) = m\beta \pm ma$$

Mitä huomaat?

4) *Etsi kappaleesta 15 vastauksia seuraaviin kysymyksiin:*

   i) *Miten luvulla x > 0 kertominen vaikuttaa vektoriin? Entä x < 0? Entä x = 0?*

   ii) *Mihin luvulla kertominen ei vaikuta?*

Ensimmäisessä kohdista tarkoituksena oli johdattaa opiskelijoita kirjassa esiintyvien merkintöjen pariin, ja huomaamaan näiden eroavaisuus heille tuttuihin merkintöihin, ja siten lopulta valmistaa heitä kääntämään tekstiä omalle kielelleen ja tutummille merkinnöille. Samoin vektorien lukumäärän ja moninkertaistamisen esittämisellä kokonaisluvulla kertomisen avulla pyrittiin kiinnittämään huomio vektorin luvulla kertomisen geometriseen tulkintaan. Edelleen kohdassa 1 esille nostettu kaava kuvaa myös kertoimien laskusääntöä summassa. Tämä liittyisi samalla kohtaan 2, jossa huomio kiinnitettäisiin samalla myös tekstissä esiintyvän nollan kahteen eri merkitykseen: lukuun nolla, ja toisaalta nollavektoriin. Näin kohdassa 3 voitaisiinkin, alkutekstissä esiintyvän tason vektoreita esittävän kuvan avustamana muodostaa kokonaislukukertoimisten vektorien yleiset, polynomilaskennasta tutut laskusäännöt, negatiiviset kokonaisluvut kertoimina mukaan lukien, ja samalla erimerkkisten kertoimien vaikutusta vektorin suuntaan esitellen (vastavektori ja sen merkintätapa on opiskelijoille tullut tutuksi jo aiemmalla tunnilla). Kohdassa 4 opiskelijoiden olisi siten edellisen pohjalta yleistettävä kokonaisluvuilla kertominen koskemaan kaikkia reaalilukuja, ja muodostettava käsitys erilaisista luvulla kertomisen vaikutuksista: siitä milloin suunta vaihtuu ja milloin ei; siitä milloin pituus kasvaa, pienenee tai pysyy samana; ja toisaalta siitä, että kahden eri vektorin yhdensuuntaisuus tarkoittaa sellaisten lukujen olemassaoloa, joilla kertomalla vektorit voidaan esittää toinen toistensa avulla.

Tehtävää varten oli suunniteltu käytettäväksi kokonaisuudessaan 40 minuuttia, joista ensimmäiset 30 minuuttia olisi opiskelijoiden tekstin tutkimiselle, kääntämiselle ja tulkitsemiselle varattua aikaa, ja lopun 10 minuuttia aikaa keskustella aiheesta yhdessä ja vaihtaa ajatuksia toisaalta ryhmien välillä, toisaalta opettajan ja opiskelijoiden välillä. Aiheen parissa jatkettaisiin vielä seuraavalla oppitunnillakin, jolloin luvulla kertominen kytkettäisiin myös yksikkövektorin käsitteeseen. Mutta tämän tehtävän tarkoituksena oli siis saada opiskelijat tutkimaan itse vektorien luvulla kertomisen perussääntöjä ja vaikutusta.

Ennakoimattomista olosuhteiden ja aikataulujen muutoksista (kuten tunnin aloituksen päälle venynyt aamunavaus ja odotettua pidempikestoinen läksyjen tarkistus tunnin alussa) johtuen aikaa tehtävälle jäi lopulta käytettäväksi vähemmän kuin alun perin suunniteltu. Lisäksi tehtävä osoittautui opiskelijoille oletettua haastavammaksi. Moni tarttui tehtävään alun pohjustuksen jäljiltä innostuneena ja kiinnostuneena, mutta vieraskielisyys ja vieras sanasto ja merkinnät toivat tehtävään huomattavaa hankaluutta. Kierrellessäni luokassa ja keskustellessani ryhmien kanssa opiskelijat kyllä jaksoivat pohtia ja yrittää selvittää mistä tekstissä oli kyse, mutta kunnolliseen käsittelyyn olisi vaadittu enemmän kuin varattu puoli tuntia aikaa. Monikaan ryhmä ei päässyt ensimmäisiä kohtia pidemmälle. Lisäksi aikataulun tiukkuuden ja pettämisen vuoksi lopun yhteinen keskustelu ja yhteenveto, asioiden yhdessä tehtävä taululle kokoaminen mukaan lukien, jäi lopulta selvästi kesken.

Kaikesta tästä huolimatta ryhmätöiden lomassa opiskelijoiden kanssa käydyt keskustelut antoivat ilahduttavasti viitteitä opiskelijoiden kyvystä jatkaa pohdintaa eteenpäin tekstin synnyttämien ajatusten pohjalta. Esimerkiksi kysymys vektorien välisestä tulosta pohditutti joitain opiskelijoita, heidän oivaltaessaan luvulla kertomisen intuitiivisen vaikutuksen ja samalla vektorien välille määriteltävän tulon monimutkaisemman luonteen. Jonkin verran tehtävää edeltäneessä opettajajohtoisessa pohjustuksessa vilahdelleet eksoottiset käsitteet kuten eriulotteiset avaruudet, tasot, kierrot ynnä muu sellainen selvästi kutkuttivat opiskelijoiden mielikuvitusta, ja joidenkin puheissa mielikuvitus lähti välillä selvästi omille teilleen, aiheen vierestä. Mutta positiivisena huomiona mielikuvituksen lentoa tuntui höystävän innostuneisuus mahdollisuudesta paneutua jännittävään, mystiseenkin aineistoon.

4.3. Opiskelijoilta saatu palaute

Seuraavalla oppitunnilla keräsin lyhyen palautteen (palautelomake liitteenä 5) opiskelijoiden näkemyksistä matematiikan historian merkityksestä matematiikan opiskelulle sekä tehdyn tehtävän herättämistä ajatuksista. Opiskelijoita pyydettiin luonnehtimaan kysyttyjä asioita useilla sopivilla tavoilla ja siksi monessa palautteessa luonnehdinnat muodostuivat eri näkökulmien yhdistelmistä. Kaikki paikalle olleet yhteensä 22 opiskelijaa antoivat palautetta.

Palautteesta nousee esille seikka, jonka saattoi havaita jo oppitunnilla Hamiltonin tekstiä luettaessa: sen ymmärtäminen tuotti monelle selvästi vaikeuksia. Jopa 14 palautelomakkeessa tehtävää kuvailtiin vaikeasti ymmärrettäväksi ja lisäksi yhdessä omin sanoin ”*ponnisteluja vaativaksi*”. Vain neljässä palautteessa tehtävää pidettiin kiinnostavana tai muuten luonnehdittiin sitä positiivisesti. Kuuden opiskelijan palautteessa tehtävää kuvailtiin tylsäksi.

Yleisesti palautteen perusteella merkittävä osa opiskelijoista kokee matematiikan historian kyllä kiinnostavaksi, mutta samalla kuitenkin turhaksi: ”*on ihan hyvä että* *sitä käsiteltiin mutta se ei ollut kovin hyödyllistä*”; ”*onhan se ihan kiinnostavaa kuulla miten tähän on päästy, muttei mitenkään tärkeää*”; ”*se voi olla ihan kiinnostavaa, mutta ei ehkä kovin hyödyllistä*”. Kiinnostavana matematiikan historiaa piti 9 opiskelijaa, turhana 7 opiskelijaa, hyödyllisenä 2 opiskelijaa, tärkeänä ei yksikään. Monelle opiskelijalle historiallinen näkökulma tarjoaa kiinnostavaa ja innostavaa vaihtelua, mutta kenties koettu kytkeytymättömyys matematiikan ylioppilaskirjoituksiin saa sen tuntumaan hyödyttömältä. Lisäksi kaksi opiskelijaa lisäsi oma-aloitteisesti sen olevan vaikeaa, kenties edellistunnilla käsitellyn tehtävän tähden. Useat toteavat sen kuitenkin yksinomaan turhaksi: ”*ei se ole niin tärkeää*”; ”*turhaa, sillä se ei opeta mitään relevanttia*”; ”*en itse kokenut sitä kovin hyödyllisenä, enkä oikein löytänyt sen yhteyttä käytännön laskuihin*”. Tylsänä matematiikan historiaa piti 8 opiskelijaa. Selkeästi keskeisin osa vastanneista koki, että matematiikan historiaa tulisi olla opetuksessa mahdollisimman vähän (13 kpl), mutta toisaalta muutamat kokivat että sitä voisi olla enemmän kuin nykyisellään (3 opiskelijaa). Jotkut (5 opiskelijaa) pitivät nykyistä määrää sopivana.

Kuitenkin huomattava määrä opiskelijoita mainitsee mielestään kiinnostavimmaksi matematiikan historian sisällöksi matemaattisten ongelmien historian ja sen, miten niitä on ratkaistu (13 opiskelijaa), sekä ratkaisemattomat ongelmat (6 opiskelijaa). Tämä on merkittävä huomio siksikin, että juuri matematiikan ongelmien historia on noussut keskeisenä ja toimivana matematiikan historian sisältöalueena myös muualla (vrt. tämän tutkielman luvut 2.2.1, 3.1 ja 3.2). Toki suosittuja ovat myös tarinat (11 opiskelijaa) ja henkilötkin (4 opiskelijaa), mutta kuten jo useaan otteeseen on mainittu, näiden keskeinen merkitys on ensisijaisesti motivoinnissa, johdattelussa ja inhimillistämisessä, siinä missä matemaattisten sisältöjen opettamiseksi ongelmat tarjoavat luontevan lähestymistavan. Toki juuri edellä mainittujen elementtien yhdistäminen, siis tarinoin inhimillisen ulottuvuuden liittäminen historiallisiin ongelmiin mahdollistaa tehokkaimman ja luontevimman tavan matematiikan historian monimuotoisten hyötyjen tuomiseksi opetukseen.

Koska opiskelijoilta kerätty palaute liittyi keskeisesti tehtyyn opetusmoduulin kokeiluun ja se kerättiin vain yhden koulun yhdelle oppitunnille osallistuneilta opiskelijoita, ei sen perusteella voida tehdä kovin pitkälle meneviä johtopäätöksiä. Kuitenkin vastauksissa ilmenee kiinnostavia yksityiskohtia, kuten matematiikan ongelmien painottaminen mieluisana sisältönä, sekä toisaalta matematiikan historian koettu kiinnostavuus ja toisaalta kokemus sen turhuudesta. Näitä kysymyksiä olisikin hyvät tutkia perusteellisemmin ja kattavammin.

4.4. Yhteenveto

Yhteenvetona kokeilu osoittautui opettavaiseksi ja avartavaksi kokemukseksi, myös itse opettajalle, ja herätti huomattavasti jatkokysymyksiä ja kehityskohteita historiallisten aineistojen tuomiseksi opetukseen. Anekdootit, jännittävät henkilöhistoriat ja mieleenpainuvat tarinat tuntuvat kaikki toimivan innostavina ja virkistävinä elementteinä opetuksen ohessa ja sitä rytmittäen. Kuitenkin, jotta varsinaisen matemaattisen sisällön oppimista tapahtuisi, olisi historia kytkettävä matemaattiseen konkretiaan, esimerkiksi tunnettuihin matemaattisiin ongelmiin. Ihannetilanteessa historialliset aineistot olisivat autenttisia osia jostakin merkittävästä tekstistä tai merkittävän henkilön tekstistä, jotta tarinat voitaisiin kytkeä suoraan käsiteltävään aineistoon ja siten motivoida opiskelijat sen tutkimisen pariin. Historiallisten tekstien tutkimisessa on kuitenkin useita kriittisiä kohtia, jotka on otettava huomioon. Korostan kahta. Ensinnäkin, mikäli työskentelymuoto on opiskelijoille vieras, työn alkuun saattaminen voi olla hyvin kankeaa, ja pahimmassa tapauksessa tyssätä lähtökuoppiinsa. Siksi olisikin tärkeää pystyä omaksumaan uutta työskentelymuotoa pikku hiljaa, alussa opettajajohtoisesti pieniä yksityiskohtia tarkastellen, pikku hiljaa laajempiin kokonaisuuksiin keskittyen ja vasta lopulta laajempia ja itsenäisempiä ryhmätöitä tehden. Tällaiseen opetteluun olisi mielekästä varata kokonainen kurssi, eikä suinkaan aloittaa tekemistä tyhjästä, kuten tässä tapauksessa, jo opetusharjoittelun sirpalemaisesta luonteesta johtuen tapahtui. Toisena keskeisenä ongelmakohtana on edelleen vieraskielisen aineiston tutkiminen ja ymmärtäminen. Vaikka esitelty tehtävä pohjautuikin englanninkieliseen, ja siten luultavimmin opiskelijoille helpoiten ymmärrettävään vieraskieliseen tekstiin, moni kohtasi huomattavia hankaluuksia etenkin matemaattisten käsitteiden kääntämisen kanssa. Opettajan olisikin hyvä tarjota vähintäänkin käännöksiä avainsanoista ja joistakin ilmauksista listana, mikä samalla voisi osaltaan kohdistaa opiskelijoiden huomiota keskeisiin kohtiin tutkittavassa tekstissä ja siten alleviivata keskeistä sisältöä.

5. Lopuksi

Hedelmällisimpiä tapoja tuoda matematiikan historiaa opetukseen voisivat olla historiallisten matematiikan ongelmien käsitteleminen, tutkiminen, niistä keskusteleminen ja niiden osien ratkominen, sillä ne paitsi mahdollistavat matematiikkaa inhimillistävien henkilöhistoriallisten elementtien ja matematiikan kulttuurihistorian tuomisen matematiikan tunnille, myös antavat samalla oivan pohjan matemaattisten sisältöjen opettamiselle ja oppimiselle. Tällöin kättä löisivät sekä matematiikan historian välinekäyttö sen parhaimmassa tapauksessa motivoivan ja innostavan lähestymistavan kautta, myös historian tavoitekäyttöön liittyvän meta-matemaattisen pohdinnan kautta, matematiikan kulttuurillisen, yhteiskunnallisen ja filosofisen luonteen pohtimisen myötä: menneisyydessä, nykyaikana ja tulevaisuudessa. Juuri lyöttämällä nämä tavoitteet yhteen, tinkimättä matemaattisten sisältöjen opettamisesta, opettajat voisivat selättää ainaisen aikapulan aikaansaamat esteet matematiikan historian tuomiselle opetukseen. Edelleen matemaattisten ongelmien selkeä sisältöihin kytkeytyminen voisi auttaa kokeidensa, ylioppilastutkintojensa ja pääsykokeidensa kanssa painiskelevia opiskelijoita näkemään matematiikan historian hyödyt ja siten motivoida sen kutkuttamien kysymysten pariin. Keskeisenä ongelmana on kuitenkin opettajien epävarmuus ja asiantuntemuksen puutteen kokemus matematiikan historian tuomiseksi opetukseen.

Siksi, jotta historiallisen aineiston käyttämisen kynnys madaltuisi koulussa niin opettajien kuin oppilaidenkin näkökulmasta olisi tärkeää tarjota valmiita aineistoja ja eväitä näiden käyttämiseksi. Esimerkiksi opettajanoppaiden liitteiksi ja monisteiksi voisi kerätä hyviä tekstikatkelmia asianmukaisine historiallisine ja henkilöitä esittelevine taustoituksineen ja opettajalle keskeisiä pedagogisia huomioita käsittelevine selityksineen, sekä vieraskielisten aineistojen kyseessä ollessa käännöksineen tai kääntämistä helpottavine sana- ja fraasilistoineen. Laajemmassa mittakaavassa matematiikan historiaa ja sen pedagogisia etuja käsittelevän kurssin voisi sisällyttää pakolliseksi osaksi matematiikan opettajien koulutusta, tuoden lisärepertuaaria varsinaiseen matemaattiseen aineenhallintaan ja didaktiseen keinovalikoimaan, opettaja-opiskelijoiden joutuessa ratkomaan ongelmia menneisyyden keinoin ja merkinnöin.

Tämän tutkielman pyrkimyksenä on ollut tarjota suomenkielinen katsaus joihinkin keskeisiin matematiikan historian opetuskäyttöä koskeviin teoreettisiin näkökulmiin, sekä aiheen empiiriseen tutkimukseen, mutta monia tarkastelusuuntia ei tämän laajuiseen tutkielmaan ole ollut mahdollista sisällyttää. Edelleen tutkielmaa tehtäessä on noussut esiin empiirisen jatkotutkimuksen paikkoja, erityisesti kotimaisesta, suomalaiseen kouluun kiinnittyvästä näkökulmasta. Tällaisia jo mainittuja tutkimuksia voisivat olla esimerkiksi:

- tutkimus matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden saamasta matematiikan historiaa sivuavasta koulutuksesta (esimerkiksi matematiikan historian kursseille osallistuminen) ja sen vaikutuksista matematiikan historian sisällyttämiseen opetukseen,
- kattava tutkimus suomalaisopettajien asenteista matematiikan historiaa ja sen opettamista kohtaan ja siitä, minkälaisista tekijöistä nämä asenteet muodostuvat, esimerkiksi Alpaslanin (2011) kehittämää mittaria käyttämällä,
- kehitystutkimus, kuinka opettajankoulutusta tulisi kehittää matematiikan historian opettamisen edistämisen näkökulmasta,
- tutkimusta siitä, millä tavalla opettajien käyttämän opetusmateriaali vaikuttaa historiallisten elementtien opettamiseen ja niiden sisältöihin,
- tutkimus siitä, minkälaista olisi opettajien toivoma matematiikan historiaa sisältävä opetusmateriaali,
- pedagogisia tuotteita opettajien tarpeiksi matematiikan historian opetukseen,
- kattava tutkimus sekä suomalaisten peruskoulun oppilaiden että lukio-opiskelijoiden suhtautumisesta matematiikan historiaan opetuksessa,
- didaktinen tutkimus siitä, minkälaisin pedagogisin ja didaktisin välinein matematiikan historiaa tulisi opettaa,
- tutkimuksia sekä opettajien että oppilaiden näkemyksistä ja uskomuksista meta-matemaattisista kysymyksistä ja niiden sisällyttämisestä kouluopetukseen.

Jotta matematiikan historian opetuksen kehittämiselle voitaisiin pidemmällä aikajänteellä luoda Suomessa matematiikan historian vakavasti otettavat puitteet, ja siten sysätä myös opettajakoulutusta sen hyödyntämisen suuntaan, olisi matematiikan historia kytkettävä myös lukion opetussuunnitelman perusteisiin, vaikkapa Tanskan esimerkin mukaisesti. Tätä kirjoitettaessa lukion valtakunnallinen opetussuunnitelmauudistus on erittäin ajankohtainen, ja sen muotoon on vielä mahdollisuus vaikuttaa.

LÄHTEET

Alpaslan, M. (2011). The development of attitudes and beliefs questionnaire towards using history of mathematics in mathematics education. CERME 7: Working Group 12 History in mathematics education**.** Luettu 27.2.2012. http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/12/CERME7_WG12_Alpaslan.pdf

Arcavi, A. & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to class-room practice. *Educ Stud Math* 66:111–129.

Bruckheimer, M. & Arcavi, A. (2000). Mathematics and its history*:* An educational partnership. Teoksessa Victor J. Katz (toim.) *Using History to Teach Mathematics: An International* Perspective. Washington, DC: Mathematical Association of America, 135–146.

Clark, K. M. (2011). Voices from the field: incorporating history of mathematics in secondary and post-secondary classrooms. CERME 7: Working Group 12 *History in mathematics education*. Luettu 28.2.2012. http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/12/CERME7_WG12_Clark.pdf

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics,* Vol. 5, No. 1, 44-48.

Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. Teoksessa John Fauvel, Jan van Maanen (toim.), *History in mathematics education: the ICMI study,* Dordrecht: Kluwer, 39-62.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3 – 6.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education—China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Furinghetti, F. (2002). On the role of the history of mathematics education. Luettu 2.3.2012. http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/panFur.pdf

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educ Stud Math* 66:131–143.

Jahnke, H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. Teoksessa John Fauvel, Jan van Maanen (toim.), *History in mathematics education: the ICMI study,* Dordrecht: Kluwer, 291-328.

Jankvist, U. T. (2009a). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education, *Educ Stud Math* 71:235–261.

Jakvist, U. T. (2009b). Using History as a 'Goal' in Mathematics Education, väitöskirja, IMFUFA, Roskilde University. http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/

Jankvist, U. T. (2010). *An implementation of two historical teaching modules: Outcomes and perspectives*. Plenary lecture delivered at the Sixth European Summer University, Vienna, Austria. Luettu 21.3.2012. http://edc.uoc.gr/~tzanakis/ESU6/PdfFiles/2-01-Jankvist.pdf

LOPS (2003). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Luettu 2.3.2012. http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

POPS (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Luettu 2.3.2012. http://www02.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf

Schubring, G. (2000). History of mathematics for trainee teachers. Teoksessa John Fauvel, Jan van Maanen (toim.), *History in mathematics education: the ICMI study,* Dordrecht: Kluwer, 91-142.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. Teoksessa John Fauvel, Jan van Maanen (toim.), *History in mathematics education: the ICMI study,* Dordrecht: Kluwer, 201-240.

Törnroos, J. (2004). Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopisto. Luettu 2.3.2012.
http://ktl.jyu.fi/arkisto/verkkojulkaisuja/T013Tornroos.pdf

MUU AINEISTO

Hamilton, W.R. (1866). Elements of Quaternions. Toimittanut William Edwin Hamilton. London: Longmans, Green.

Hardy, G.H. (1997). Matemaatikon apologia (A Mathematician's Apology, 1940). Esipuhe: C.P. Snow. Suomentanut Kimmo Pietiläinen. Terra Cognita: Helsinki.

Matematiikan historian yliopistokurssien materiaaleja:

Lehtinen, M. (2000). Matematiikan historia – verkkomateriaali Solmu-lehden verkkosivuilla. Luettu 24.4.2012. http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/

Lehtinen, M. Matematiikan historian luentoja. Luettu 24.4.2012.
http://cc.oulu.fi/~matlehti/histluennot.pdf
Kirjallisuusluettelo: http://www.elisanet.fi/matti.t.Lehtinen/histkirjat.pdf

Suomela, P. (2006). Matematiikan historia. Tekstejä, tehtäviä, tiivistelmiä. Jyväskylän yliopisto.

Laudatur – oppikirjasarja (Otava):

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2005a). *Laudatur 1 – MAA1 Funktiot ja yhtälöt,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2005b). *Laudatur 2 – MAA2 Polynomifunktiot,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2005c). *Laudatur 3 – MAA3 Geometria,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2005d). *Laudatur 4 – MAA4 Analyyttinen geometria,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2006a). *Laudatur 5 – MAA5 Vektorit,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2006b). *Laudatur 6 – MAA6 Todennäköisyys ja tilastot,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2006c). *Laudatur 7 – MAA7 Derivaatta,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2006d). *Laudatur 8 – MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2006e). *Laudatur 11 – MAA11 Lukuteoria ja logiikka,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2007a). *Laudatur 9 – MAA9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2007b). *Laudatur 10 – MAA10 Integraalilaskenta,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola L. (2007c). *Laudatur 12 – MAA12 Numeerisia ja algebraalisia menetelmiä,* Otava, Helsinki.

Hautajärvi, T., Ottelin, J.;, Wallin-Jaakkola L. (2007d). *Laudatur 13 – MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi,* Otava, Helsinki.

Matematiikan taito – oppikirjasarja (WSOY):

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2005a). *Matematiikan taito 1-2 Funktiot ja yhtälöt, Polynomifunktiot,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2005b). *Matematiikan taito 3 Geometria,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2005c). *Matematiikan taito 4 Analyyttinen geometria,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2006a). *Matematiikan taito 5 Vektorit,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2006b). *Matematiikan taito 6 Todennäköisyys ja tilastot,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2006c). *Matematiikan taito 10 Integraalilaskenta,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2006d). *Matematiikan taito 11 Lukuteoria ja logiikka,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2007a). *Matematiikan taito 7 Derivaatta,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2007b). *Matematiikan taito 8 Juuri- ja logaritmifunktiot,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2007c). *Matematiikan taito 12 Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2008a). *Matematiikan taito 9 Trigonometriset funktiot ja lukujonot,* WSOY, Helsinki.

Halmetoja M., Häkkinen K., Merikoski J., Pippola L., Silfverberg H. et al. (2008b). *Matematiikan taito 13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi,* WSOY, Helsinki.

LIITE 1 Kyselylomake

1. Opetuskokemus ________ vuotta

2. Olen opettanut matematiikkaa (alleviivaa kaikki sopivat)

   peruskoulussa
   lukiossa (lyhyt oppimäärä)
   lukiossa (pitkä oppimäärä)

3. Koen matematiikan historian tärkeänä osana matematiikan opetusta. (Ympyröi sopivin vaihtoehto.)

   1=täysin eri mieltä
   2=jokseenkin eri mieltä
   3= jokseenkin samaa mieltä
   4= täysin samaa mieltä

4. Koen että minulla on hyvät valmiudet sisällyttää historiallinen näkökulma matematiikan opetukseen. (Ympyröi sopivin vaihtoehto.)

   1=täysin eri mieltä
   2=jokseenkin eri mieltä
   3= jokseenkin samaa mieltä
   4= täysin samaa mieltä

5. Pyrin tuomaan matematiikan historiaa esille omassa opetuksessani (Ympyröi sopivin vaihtoehto.)

   1=erittäin vähän
   2=niukasti
   3= jonkin verran
   4= erittäin paljon

6. Mielestäni oppilaat suhtautuvat matematiikan historiaan

   1=erittäin negatiivisesti
   2=hieman negatiivisesti
   3= suhteellisen positiivisesti
   4= erittäin positiivisesti

7. Mielestäni matematiikan historia voisi innostaa oppilaita matematiikan opiskelussa

   1=täysin eri mieltä
   2=jokseenkin eri mieltä
   3= jokseenkin samaa mieltä
   4= täysin samaa mieltä

8. *Alleviivaa sopivimmat vaihtoehdot.*
   Käsittelisin matematiikan historiaa mieluiten
   anekdoottien kautta
   henkilöhistorioiden kautta
   matematiikan ongelmien historian kautta
   jollakin muulla tavoin, miten?________________________________
   *Anna mieluiten jokin esimerkki (jatka tarvittaessa viimeisellä sivulla kysymyksen 11 yhteydessä):*____

9. Matematiikan historiaa tulisi käsitellä selvästi enemmän kouluopetuksessa

1=täysin eri mieltä
2=jokseenkin eri mieltä
3= jokseenkin samaa mieltä
4= täysin samaa mieltä

10. Alleviivaa sopivat vaihtoehdot.

Matematiikan historian opettamisen ensisijaisena rajoitteena näen
ajan puutteen
opetusmateriaalin puutteen
koulutuksen puutteen
opettajan valmiuksien puutteen
jonkin muun, minkä?____

11. Kuvaile vapain sanoin suhdettasi matematiikan historian opetukseen joko omassa opetuksessasi tai omilta kouluajoiltasi. Minkä näkisit optimitilanteena matematiikan historian opettamisen kannalta?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

LIITE 2 Opettajien vastaukset kyselyyn

	Opettaja 1	Opettaja 2	Opettaja 3	Opettaja 4	Opettaja 5
1.Opetuskokemus	10 vuotta	28 vuotta	30 vuotta	28 vuotta	4 vuotta
2. Olen opettanut matematiikkaa	lukiossa (pitkä oppimäärä)	peruskoulussa	peruskoulussa ja lukiossa (lyhyt ja pitkä)	peruskoulussa ja lukiossa (lyhyt ja pitkä)	peruskoulussa
3. Koen matematiikan historian tärkeänä osana matematiikan opetusta.	1=täysin eri mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä
4. Koen että minulla on hyvät valmiudet…	2=jokseenkin eri mieltä	2=jkseenkin eri mieltä	4=täysin samaa mieltä	2=jokseenkin eri mieltä	2=jokseenkin eri mieltä
5. . Pyrin tuomaan matematiikan historiaa esille omassa opetuksessani	1=erittäin vähän	3=jonkin verran	3=jonkin verran	3=jonkin verran	3=jonkin verran
6. Mielestäni oppilaat suhtautuvat matematiikan historiaan	3= suhteellisen positiivisesti	-----	3= suhteellisen positiivisesti	3= suhteellisen positiivisesti	3= suhteellisen positiivisesti
7. Mielestäni matematiikan historia voisi innostaa oppilaita	2=jokseenkin eri mieltä	2=jokseenkin eri mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	2,5 ”=” jokseenkin eri/samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä
8. Käsittelisin matematiikan historiaa mieluiten	*Tarinoiden kautta*	henkilöhistorioiden ja matematiikan ongelmien historian kautta	henkilöhistorioiden ja matematiikan ongelmien kautta: *neliöjuuren määrittämistä, Pythagoraan lause, Gaussia voi käyttää lukiossa useammassakin kohdassa*	henkilöhistorioiden ja matematiikan ongelmien historian kautta	henkilöhistorioiden ja matematiikan ongelmien historian kautta
9. Matematiikan historiaa tulisi käsitellä selvästi enemmän…	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä
10. Matematiikan historian opettamisen […]rajoitteena näen	opettajan valmiuksien puutteen , ei siis tiedä historiasta	ajan, opetusmateriaalin ja koulutuksen puutteen	ajan ja opetusmateriaalin puutteen	ajan ja valmiuksien puutteen	ajan ja opetusmateriaalin ja *viitseliäisyyden* puut-

Opettaja 6	Opettaja 7	Opettaja 8	Opettaja 9	Opettaja 10	Opettaja 11
5 vuotta	4,5 vuotta	10 vuotta	3,5 vuotta	6 vuotta	6,5 vuotta
peruskoulussa	peruskoulussa	peruskoulussa	peruskoulussa ja lukiossa (pitkä)	peruskoulussa ja lukiossa (lyhyt ja pitkä)	peruskoulussa ja lukiossa (lyhyt ja pitkä)
3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä
2=jokseenkin eri mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	2=jokseenkin eri mieltä	2=jokseenkin eri mieltä
2=niukasti	2=n iukasti	3=jonkin verran	3=jonkin verran	2=niukasti	3=jonkin verran
3= suhteellisen positiivisesti	3= suhteellisen positiivisesti	3= suhteellisen positiivisesti	3= suhteellisen positiivisesti	3= suhteellisen positiivisesti	4=erittäin positiivisesti
3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	4=täysin samaa mieltä
henkilöhistorioiden kautta	henkilöhistorioiden kautta	henkilöhistorioiden ja matematiikan ongelmien historian kautta	matematiikan ongelmisen historian kautta: *Matematiikan opetuksessa historian linkittäminen motivoi vaikka näkökulma olisi mikä tahansa. Jotain kiinnostaa selkeästi henkilöhistoria ja jotain toista puolestaan ongelmien historia. Itse lähtisin ehkä mieluiten ongelmista…*	matematiikan ongelmien historian kautta: *Esimerkiksi piin historia*	henkilöhistorioiden ja matematikkan ongelmien historian kautta: *En osaa antaa valmista esimerkkiä, mutta yhdistelmänä henkilöhistoriaa ja historiallista matemaattista ongelmaa. Eli millaisen ongelman edessä tunnettu matemaatikko on ollut ja millaisin keinoin ja teorioin hän on saanut ongelman ratkaistuksi.*
3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä	2= jokseenkin eri mieltä	3= jokseenkin samaa mieltä
valmiuksien (1) ja ajan (2) puutteen	ajan puutteen	opetusmateriaalin ja valmiuksien puutteen	ajan puutteen	ajan ja valmiuksien puutteen	valmiuksien puutteen

	Opettaja 1	Opettaja 2	Opettaja 3	Opettaja 4	Opettaja 5
11. Kuvaile vapain sanoin suhdettasi matematiikan historian opetukseen	*Kiinnostavat tarinat historiaan liittyen voisivat tuoda piristystä arkeen. Asiaan pitäisi olla opellakin aikaa perehtyä.*	*Matematiikan historian kurssi jäi aikoinaan käymättä, joten historia ei sillä lailla ole hallinnassa. Yksittäiset henkilöhistoriat eivät tässä paljon auta. Mikäli halutaan, että opettajilla on näkemys myös historiasta, pitäisi matematiikan historia sisällyttää pakollisiin opintoihin.*	*Oppikoulussa opiskel tiin erikseen algebraa ja geometriaa. Geometriassa opettaja antoi meidän itse keksiä todistuksia geometrisille probleemoille ihan antiikin periaatteiden mukaisesti. Siitä alkaen olen yhdistänyt historian ja matematiikan.*	*- uudet käsitteet <-> "miten tähän on tultu"* *- henkilöiden yhteydessä <-> "mitä muuta on tehty"* *- matematiikka on lähes aina tullut tarpeeseen → vastaa kysymykseen: "Mihin tätä tarvitaan"*	----

Opettaja 6	Opettaja 7	Opettaja 8	Opettaja 9	Opettaja 10	Opettaja 11
Omilta kouluajoilta ei ole muistikuvaa matematiikan historian opetuksesta. Omassa opetuksessa puutteena on oma tietojen puutteeni ja ajan puute, etten ehdi hirveästi ottaa selvillekään. Jos esim. opettajan oppaassa olisi lisätietoja ja historiaa, ottaisin sitä opetuksessa helpommin esiin.	*Historiaa olisi mielekästä opettaa koko ajan muun opetuksen rinnalla ja siihen linkittäen. Kuitenkin aika on usein niin rajallinen, että perusasioiden opettelu on vain pakko pistää historian edelle. Sen lisäksi, että historiaa olisi mukana asioiden opettelun rinnalla, voisi yhdeksännellä luokalla olla oppilaille mielekästä perehtyä matikan historiaan enemmän hieman kokonaisvaltaisemmin. En muista juurikaan opiskelleeni matikan historiaa kuin vasta yliopistossa, mutta voin hyvinkin muistaa väärin…*	-----	*Matematiikan historialla on omassa opetuksessani mielestäni liian pieni rooli. Omat taustatiedot matematiikan historiasta ovat varsin niukat, joten historianäkökulma jää usein vähäiseksi. Optimitilanteessa opettajalla on historiasta laaja näkemys ja hän sisällyttää sitä opetukseensa. Näkökulma voi mielestäni olla myös esim. matematiikka fysiikan apuvälineenä, jolloin teema laajenee oppiaineiden väliseen integraatioon; opetuksesta tulee mielekkäämpää jos oppiaine sidotaan johonkin ja aine saa lisää merkityksiä.*	*En kauhean paljon painota matematiikan historian opettamista. Sopivissa tilanteissa voi kertoa jotain, tai esimerkiksi johdatella aiheeseen historian avulla. Voi motivoida ja lisätä kiinnostusta toisilla. Lisäksi lisätehtävänä esimerkiksi lukujärjestelmien kehittyminen on kiinnostava aihe. Olen kyllä yliopistolla opiskellut matematiikan historian kurssin, mutta moni asia on unohtunut. Myös peruskoulumatematiikkaan moni asia on aivan liian vaikea syvällisempää tarkastelua varten. Omilta kouluajoiltani en muista ollenkaan matematiikan historiaa.*	*Omassa opetuksessani käytän niukasti matematiikan historiaa, vaikka haluaisin käyttää enemmänkin. Omat valmiudet ja ennen kaikkea tietomäärä aiheesta tuntuu moneen asiaan liian rajalliselta. Oppikirjoissa saattaa paikoin olla lyhyitä mainintoja johonkin teoriaa liittyvistä historiallisista seikoista ja näkökulmista ja näitä mielelläni käytän ja oman tietämykseni pohjalta laajennan, mutta valitettavan harvoin omat tiedot riittävät luontevaan laajentamiseen ja kysely- tai keskustelumuotoiseen lähestymiseen. Optimaalisessa tilanteessa historialliset esimerkit sitovat teoriaa käytäntöön, tarjoavat oppilaille kiinnekohtia, lisäävät sitä kautta motivaatiota ja tuovat havainnollisella tavalla esille matematiikan merkityksen ja hyödyllisyyden.*

LIITE 3 Oppikirjojen historiasisältö

	sivuja	teht.	historiaa	h%	PRO	EPI	HT	HH	O	N	nimiä
Laudatur 1	198	58 sivua	14 sivulla	7,1	5 36 %	1 7 %	4 29 %	3 21 %	4 29 %	13 93 %	12
Laudatur 2	176	53 sivua	11 sivulla	6,3	3 27 %	0 0 %	4 36 %	5 45 %	5 45 %	7 64 %	8
Laudatur 3	214	70 sivua	9 sivulla	4,2	1 11 %	1 11 %	1 11 %	4 44 %	6 67 %	8 89 %	5
Laudatur 4	149	38 sivua	2 sivulla	1,3	1 50 %	0 0 %	0 0 %	2 100 %	1 50 %	1 50 %	1
Laudatur 5	181	44 sivua	2 sivulla	1,1	1 50 %	0 0 %	0 0 %	2 100 %	2 100 %	2 100 %	2
Laudatur 6	214	68 sivua	11 sivulla	5,1	4 36 %	2 18 %	2 18 %	8 73 %	7 64 %	5 45 %	15
(Laudatur 7	177	47 sivua	0 sivulla	0	0	0	0	0	0	0	0)
Laudatur 8	144	41 sivua	4 sivulla	2,8	0 0 %	1 25 %	2 50 %	1 25 %	2 50 %	3 75 %	5
Laudatur 9	182	50 sivua	12 sivulla	6,6	3 25 %	1 8 %	4 33 %	3 25 %	4 33 %	10 83 %	11
Laudatur 10	118	35 sivua	2 sivulla	1,7	1 50 %	0 0 %	0 0 %	1 50 %	2 100 %	2 100 %	3
Laudatur 11	140	35 sivua	27 sivulla	19	3 11 %	0 0 %	11 41 %	5 19 %	15 56 %	11 41 %	21
Laudatur 12	138	38 sivua	3 sivulla	2,2	0 0 %	2 67 %	0 0 %	2 67 %	3 100 %	3 100 %	6
Laudatur 13	139	32 sivua	7 sivulla	5,0	1 14 %	0 0 %	0 0 %	1 14 %	3 43 %	5 71 %	10
Laudatur keskiar-vo (pl. Laudatur 7)	166 sivua	46 sivua/ kirja	8,7 sivulla/ kirja	5,2	22 %	8 %	27 %	36 %	52 %	67 %	yht. 71 eri nimeä

Laudatur -kirjasarjassa esiintyvät nimet (suluissa kirjan numero, jossa nimi esiintyy):

Niels Henrik Abel (1, 2, 11)
Aristoteles (11)
Arkhimedes (1, 3, 12)
Frank Benford (6)
Daniel Bernoulli (13)
Nicolas Bernoulli (13)
Bhaskaracharya Acharya (1, 8)
Janos Bolyai (3)
George Boole (11)
Steven Boone (8)
Georg Cantor (9, 13)
Eugène Charles Catalan (11)
Curtis Cooper (8)
Rene Descartes (1, 4)
Diofantos (2, 11)
Peter Lejeune Dirichlet (11)
Charles Dogson (Lewis Carrol) (6)
Albert Einstein (1)
Eratosthenes Kyreneläinen (3, 11)
Eukleides (2, 11)
Leonhard Euler (5, 13)
Pierre de Fermat (2, 6, 11)
Leonardo Pisalainen (Fibonacci) (9)
Jean Baptiste Joseph Fourier (9)
Galileo Galilei (1, 6)
Sir Francis Galton (12)
Geronimo Gardani (6)
Carl Friedrich Gauss (1, 9, 11)
Christian Goldbach (11)
Benjamin Gompertz (6)
Guillame (13)
Kurt Gödel (11)
Jacques Salomon Hadamard (11)
William Rowan Hamilton (5)
Heron Aleksandrialainen (3)
Johannes Kepler (12)
John Kerrich (6)
A.N. Kolmogorov (6)
Georges-Louis Leclerc (Comte de Buffon) (6, 13)
Joseph Louis Lagrange (11)
Adrien-Marie Legendre (9, 11)
Gottfried Wilhelm Leibniz (9, 10, 11, 13)
Gösta Mittag-Leffler (9)
Francois Antoine de l'Hospital (13)
Ernst Lindelöf (1)
Edouard Lucas (9)
Chelavier de Méré (6)
Marin Mersenne (11)
Preda Mihailescu (11)
August Ferninand Möbius (10)
John Napier (Neper) (8, 13)
Rolf Nevanlinna (2)
Simon Newcomb (6)
Sir Isaac Newton (1, 6, 9, 10, 12, 13)
Nicole Oresme (1)
William Oughtred (8)
Blaise Pascal (6)
Karl Pearson (12)
Samuel Pepys (6)
Platon (3)
Georg Pólyan (6)
Pythagoras (2)
Bertrand Russel (11)
Thomas Simpson (12)
Jacques Charles Francios Sturm (2)
Charles Jean de la Vallée-Poussin (11)
John Venn (1)
Francois Viète (13)
Andrew Wiles (2, 11)
Leonardo da Vinci (1)
Zenon (9)

	sivuja	teht.	historiaa	hist%	PRO	EPI	HT	HH	O	N	nimiä
Matematiikan taito 1-2	219	89 sivua	6 sivulla	2,7	0 0 %	0 0 %	5 83 %	1 17 %	4 67 %	6 100 %	10
Matematiikan taito 3	179	68 sivua	7 sivulla	3,9	0 0 %	0 0 %	3 43 %	0 0 %	6 86 %	7 100 %	9
Matematiikan taito 4	154	47 sivua	3 sivulla	1,9	0 0 %	1 33 %	1 33 %	1 33 %	2 67 %	3 100 %	3
Matematiikan taito 5	150	38 sivua	1 sivulla	0,7	0 0 %	0 0 %	1 100 %	0 0 %	0 0 %	1 100 %	2
Matematiikan taito 6	152	58 sivua	9 sivulla	5,9	0 0 %	0 0 %	5 56 %	0 0 %	6 67 %	9 100 %	11
Matematiikan taito 7	162	58 sivua	8 sivulla	4,9	1 13 %	0 0 %	0 0 %	0 0 %	4 50 %	6 75 %	7
Matematiikan taito 8	109	38 sivua	5 sivulla	4,6	0 0 %	0 0 %	3 60 %	0 0 %	3 60 %	4 80 %	3
Matematiikan taito 9	146	47 sivua	1 sivulla	0,7	0 0 %	0 0 %	1 100 %	0 0 %	1 100 %	0 0 %	1
Matematiikan taito 10	125	46 sivua	2 sivulla	1,6	1 50 %	0 0 %	0 0 %	0 0 %	2 100 %	2 100 %	2
Matematiikan taito 11	111	36 sivua	5 sivulla	4,5	0 0 %	0 0 %	3 60 %	0 0 %	3 60 %	3 60 %	6
Matematiikan taito 12	91	33 sivua	14 sivulla	15,4	0 0 %	0 0 %	8 57 %	1 7 %	6 43 %	8 57 %	13
Matematiikan taito 13	172	58 sivua	3 sivulla	1,7	0 0 %	0 0 %	3 100 %	0 0 %	3 100 %	3 100 %	2
Matematiikan taito keskiarvo	148 sivua	51 sivua/ kirja	5,5 sivulla/ kirja	3,6	3 %	2 %	52 %	5 %	63 %	81 %	yht. 49 eri nimeä

Matematiikan taito -kirjasarjassa esiintyvät nimet (suluissa kirjan numero, jossa nimi esiintyy):

Niels Henrik Abel (1-2)
Arkhimedes (3, 12)
Daniel Bernoulli (6)
Joseph Bertrand (6)
János Bolyai (3)
Henry Briggs (8)
Girolamo Cardano (1-2)
Augustin Louis Cauchy (5, 7)
Chang Ch'iu-chien (11)
Chiu Cang Suan Shu (4)
Roger Cotes (12)
George Dantzig (4)
René Descartes (4)
Diofantos (11)
Peter Gustav Lejeune Dirichlet (7)
Eukleides (3, 11)
Leonhard Euler (3, 8, 11, 13)
Pierre Joseph Louis Fatou (12)
Pierre Fermat (6, 7, 11, 13)
Lodovico Ferrari (1-2)
Scipione del Ferro (1-2)
Leonardo Pisano Fibonacci (1-2, 7)
Evariste Galois (1-2)
Carl Friedrich Gauss (6, 12)
Christian Goldbach (11)
Heron Aleksandrialainen (3)
David Hilbert (3)
Gaston Maurice Julia (12)
Joseph Louis Lagrange (7, 12)
Gottfried Wilhelm Leibniz (7, 10)
Nikolai Lobatshevski (3)
Benoit Mandelbrot (12)
Chévalier de Méré (6)
Abrham De Moivre (12)
John Napier eli Neper (8, 12)
Sir Isaac Newton (6, 10, 12)
Blaise Pascal (1-2, 6, 7)
Samuel Pepys (6)
Siméon Denis Poisson (6)
Pythagoras (1-2, 3,)
Srinivasa Aiyanger Ramanujan (1-2, 12)
Bertrand Russell (6)
Karl Herman Amandus Schwarz (5)
Thomas Simpson (12)
James Stirling (12)
Tartaglia (1-2)
Pierre Varignon (3)
John Venn (6)
Zenon (9)

LIITE 4 Sir William Rowan Hamilton: *Elements of Quaternions* (1866), sivut 8-9

SECTION 4.—*On Coefficients of Vectors.*

12. The *simple* or *single* vector, α, is also denoted by 1α, or by $1 . \alpha$, or by $(+1)\alpha$; and in like manner, the *double* vector, $\alpha + \alpha$, is denoted by 2α, or $2 . \alpha$, or $(+2)\alpha$, &c.; the *rule* being, that for any algebraical integer, m, regarded as a *coefficient* by which the vector α is *multiplied*, we have always,

$$1\alpha + m\alpha = (1 + m)\alpha;$$

the symbol $1 + m$ being here interpreted as in algebra. Thus, $0\alpha = 0$, the zero on the one side denoting a *null coefficient*, and the zero on the other side denoting a *null vector;* because by the rule,

$$1\alpha + 0\alpha = (1 + 0)\alpha = 1\alpha = \alpha, \text{ and } \therefore 0\alpha = \alpha - \alpha = 0.$$

Again, because $(1)\alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0\alpha = 0$, we have $(-1)\alpha = 0 - \alpha = -\alpha = -(1\alpha)$; in like manner, since $(1)\alpha + (-2)\alpha = (1-2)\alpha = (-1)\alpha = -\alpha$, we infer that $(-2)\alpha = -\alpha - \alpha = -(2\alpha)$; and generally, $(-m)\alpha = -(m\alpha)$, whatever whole number m may be: so that we may, without danger of confusion, *omit the parentheses* in these last symbols, and write simply, -1α, -2α, $-m\alpha$.

13. It follows that *whatever two whole numbers* (positive or negative, or null) may be represented by m and n, and *whatever two vectors* may be denoted by α and β, we have always, as in algebra, the formulæ,

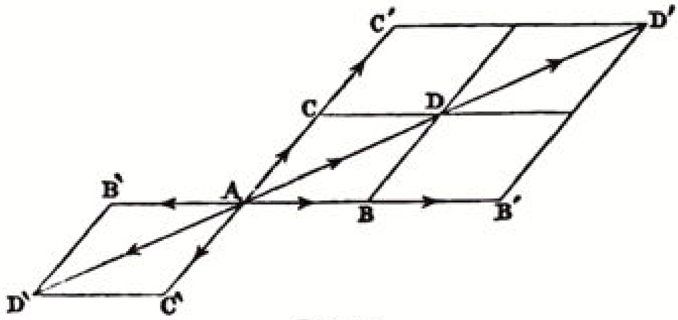


Fig. 12.

$$n\alpha \pm m\alpha = (n \pm m)\alpha, \qquad n(m\alpha) = (nm)\alpha = nm\alpha,$$

and (compare Fig. 12),

$$m(\beta \pm \alpha) = m\beta \pm m\alpha;$$

so that the *multiplication of vectors by coefficients* is a *doubly distributive operation*, at least if the *multipliers* be *whole numbers*; a restriction which, however, will soon be removed.

14. If $m\alpha = \beta$, the coefficient m being still *whole*, the vector β is said to be a *multiple* of α; and conversely (at least if the integer m be different from *zero*), the vector α is said to be a *sub-multiple* of β. A *multiple of a sub-multiple* of a vector is said to be a *fraction* of that vector; thus, if $\beta = m\alpha$, and $\gamma = n\alpha$, then γ is a fraction of β, which is denoted as follows, $\gamma = \frac{n}{m}\beta$; also β is said to be *multiplied* by the fractional coefficient $\frac{n}{m}$, and γ is said to be the *product* of this multiplication. It follows that if x and y be *any two fractions* (positive or negative or null, whole numbers being included), and if α and β be *any two vectors*, then

$$y\alpha \pm x\alpha = (y \pm x)\alpha, \quad y(x\alpha) = (yx)\alpha = yx\alpha, \quad x(\beta \pm \alpha) = x\beta \pm x\alpha;$$

results which include those of Art. 13, and may be extended to the case where x and y are *incommensurable coefficients*, considered as *limits* of *fractional* ones.

15. For any actual vector α, and for any coefficient x, of any of the foregoing kinds, the *product* $x\alpha$, interpreted as above, represents always a *vector* β, which has the *same direction* as the *multiplicand-line* α, if $x > 0$, but has the *opposite* direction if $x < 0$, becoming *null* if $x = 0$. Conversely, if α and β be *any two actual vectors*, with directions *either* similar *or* opposite, in *each* of which two cases we shall say that they are *parallel vectors*, and shall write $\beta \parallel \alpha$ (because *both* are then *parallel*, in the *usual* sense of the word, to *one common line*), we can always find, or conceive as found, a *coefficient* $x \gtrless 0$, which shall satisfy the equation $\beta = x\alpha$; or, as we shall also write it, $\beta = \alpha x$; and the positive or negative *number* x, so found, will bear to ± 1 the same *ratio*, as that which the *length* of the line β bears to the length of α.

LIITE 5 Palautelomake opiskelijoiden näkemyksistä historian käyttämisestä opetuksessa

Alleviivaa kaikki sopivat vaihtoehdot

1. Mielestäni matematiikan historia on

kiinnostavaa / tylsää / tärkeää / turhaa / hyödyllistä /
jotain muuta: ___________________

2. Haluaisin että matematiikan historiaa käsiteltäisiin lukiossa

enemmän kuin nykyään / vähemmän kuin nykyään /
mahdollisimman paljon / mahdollisimman vähän

3. Alkuperäisten matemaattisten tekstien tutkiminen voisi olla

kiinnostavaa / tylsää / tärkeää / turhaa / hyödyllistä /
jotain muuta:___________________

4. Matematiikan historiassa minua kiinnostavat eniten

henkilöt / tarinat / ongelmien ratkaisut (eli miten niihin on päästy) /
ratkaisemattomat ongelmat /miksi ja milloin matematiikkaa on tehty /
jotain muuta: ___________________

5. Maanantain 16.4.2012 tunnilla tutkittu Hamiltonin teksti (*Elements of quaternions, 1866*) oli minusta

tylsä / kiinnostava / vaikeasti ymmärrettävä / helposti ymmärrettävä /
jotain muuta: ___________________

6. Lopuksi, kerro omin sanoin mitä ajattelet matematiikan historiasta ja miten suhtaudut sen käsittelemiseen matematiikan opetuksessa.

____
____
____
____
____